



实分析笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：July 25, 2023

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

目录

第 1 章 测度论	1
1.1 预备理论	1
1.2 外测度	4
1.3 可测集与 Lebesgue 测度	6
1.3.1 σ -代数与 Borel 集	10
1.3.2 不可测集的例子	11
1.4 可测函数	12
1.4.1 可测函数及基本性质	12
1.4.2 由阶梯函数与简单函数逼近	14
1.4.3 Littlewood 三原理	16
1.5 Brunn-Minkowski 不等式	18
第 2 章 积分理论	21
2.1 Lebesgue 积分	21
2.2 可积函数空间 L^1	30
2.3 Fubini 定理	33
2.3.1 Fubini 定理的证明	33
2.3.2 Fubini 定理的应用	35
2.4 Fourier 变换的简单讨论	38
第 3 章 微分与积分	41
3.1 积分的微分	41
3.1.1 Hardy-Littlewood 极大函数	41
3.1.2 Lebesgue 微分定理	42
3.2 好核与恒同逼近	45
3.3 函数的微分	48
3.3.1 有界变差函数	48
3.3.2 Vitali 覆盖定理	53
3.3.3 绝对连续函数	58
3.4 几何上的应用	62
附录 A 补充内容	67
A.1 集合的势	67
A.2 Cantor 集	69
A.3 依测度收敛与其余收敛性间的关系	71
A.4 L^p 空间	75
A.5 有界变差函数的性质	76

第1章 测度论

1.1 预备理论

定义 1.1 (开集与闭集)

称 $O \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, 若对任意 $x \in O$, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset O$. 称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为闭集, 若 E^c 为开集.

定义 1.2 (紧致集)

$\mathbb{R}^d$ 中满足 H-B 性质的集合为紧致集, 特别的, 在 $\mathbb{R}^d$ 中紧致与有界闭等价.

定义 1.3 (闭矩形)

$\mathbb{R}^d$ 中的闭矩形定义为 $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, 其中 $a_i \leq b_i$. 定义其体积

$$|R| = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i). \quad (1.1)$$

特别的, 若 $b_i - a_i = l$, 则称 R 为立方体.

引理 1.1

若矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 能写成 $\mathbb{R}^d$ 中有限个矩形 $R_1, \dots, R_n$ 的无交并, 则

$$|R| = \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.2)$$

证明 考虑由 $R_1, \dots, R_j$ 生成的如下网格, 设分割后的矩形为 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m$, 以及无交指标集 $J_1, \dots, J_n$ 满足

$$R = \bigcup_{k=1}^m \tilde{R}_k, \quad R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j \quad (1.3)$$

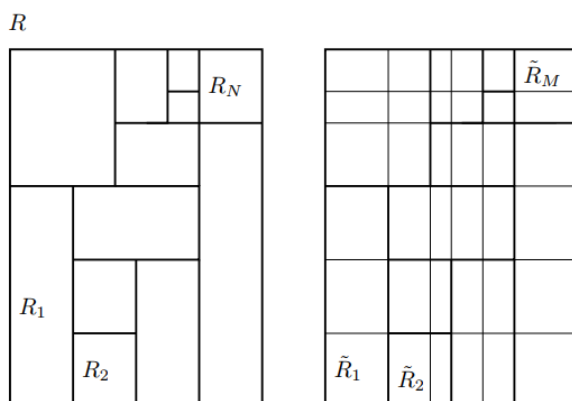


图 1.1: 矩形网格

则求和可得

$$|R| = \sum_{k=1}^m |\tilde{R}_k| = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.4)$$

引理 1.2

若矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 能写成 $\mathbb{R}^d$ 中有限个矩形 $R_1, \dots, R_n$ 的并, 则

$$|R| \leq \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.5)$$

定理 1.1

任意 $\mathbb{R}$ 中开集 O 都能唯一写成可数开区间的并.

证明 设 $x \in O$, 则存在 O 中开区间包含 x , 设 $I_x = (a_x, b_x)$ 为这样最大的开区间, 即

$$a_x = \inf a < x : (a, x) \subset O, \quad b_x = \sup x < b : (x, b) \subset O, \quad (1.6)$$

容易验证这样的开区间确实是最大的 (对于 O 中开区间 I 包含 x , 都有 $I \subset I_x$, 否则与 a_x, b_x 定义矛盾), 进一步也容易验证对于任意 $x, y \in O$, 必有 $I_x = I_y$ 或 $I_x \cap I_y = \emptyset$, 即定义出了等价类. 由于所有有理数是可数的, 因此可以在每个等价类中取一个有理数, 即这样的分解为可数的.

若 O 可以分别分解为一系列 I_i, I'_j 的并, 设 $I_i \cap I'_j \neq \emptyset$, 若 $I_i \neq I'_j$, 则同样会导出 a_x, b_x 定义的矛盾, 得证.

注

1. 上面的等价类实际上用到了 $\mathbb{R}$ 的拓扑性质, 每个等价类对应一个连通分支.
2. 对于闭集, 不能分解为可数无交闭集的并, 否则考虑集合

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_i - \frac{1}{2^i}, r_i + \frac{1}{2^i}) \supset \mathbb{Q}, \quad (1.7)$$

若 F^c 能作分解, 则其中每个闭集均为单点集 (因为 $F^c \cap \mathbb{Q} = \emptyset$), 利用后面外测度理论可知, $0 < m_*(F) < \infty$, $m_*(F^c) = \infty$, 但可数单点集外测度为 0, 矛盾.

定理 1.2

任何开集 $O \subset \mathbb{R}^d$ 都能写成可数闭立方体 (几乎不相交, 即内部不相交) 的并.

证明 如下图所示, 依次用 2^{-n} 为边长的立方体铺满开集即可, 需要注意一点: 可数个可数并仍然可数 (这实际上是 $\mathbb{N}^2$, 仿照 $\mathbb{Q}^+$ 排列可证).

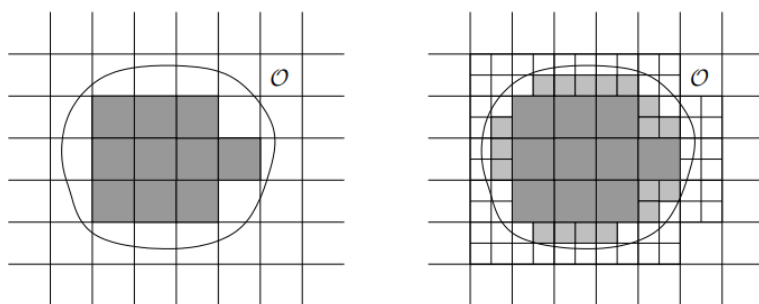


图 1.2: 铺满开集

Cantor 集

Cantor 集是实分析中的一个重要概念, 也常作为反例出现, 其构造方法是将 $[0, 1]$ 不断三分取其二, 如下图所示.

其中

$$C_0 = [0, 1] \quad (1.8)$$

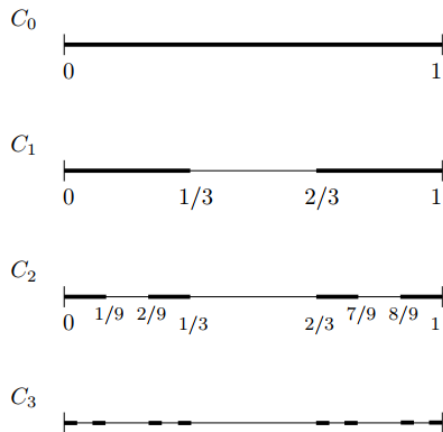


图 1.3: Cantor 集

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \quad (1.9)$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \quad (1.10)$$

$$\dots \quad (1.11)$$

定义 1.4 (Cantor 集)

设 $C_0, C_1, \dots$ 如上, 则定义 Cantor 集 $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.



显然有 $0, 1 \in \mathcal{C}$, 因此 Cantor 集非空, 事实上, 上面的每个分点都在 $\mathcal{C}$ 中. 下面讨论 Cantor 集的诸多性质.

命题 1.1

Cantor 集为 Lebesgue 零测集.



证明 可以看出, 每个 C_k 都是 2^k 个长度为 $1/3^k$ 的无交并, 因此计算其长度可得

$$m_*(\mathcal{C}) \leq m_*(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (1.12)$$

令 $k \rightarrow \infty$ 可得 $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

命题 1.2

Cantor 集为有界闭集.



证明 有界性显然, 而闭集的任意交还是闭集, 得证.

命题 1.3

Cantor 集是完全集, 即任何点都是极限点 ($\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, 或者说无孤立点).



证明 设 $x \in \mathcal{C}$, 则对任意 ε , 必定存在某一步区间的分点, 与 x 距离小于 ε , 得证.

命题 1.4

Cantor 集为不可数集.



证明 见附录中进一步讨论.

1.2 外测度

定义 1.5 (外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则定义 E 的外测度为

$$m_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}. \quad (1.13)$$

其中 Q_j 为闭立方体.



外测度实际上就是所有覆盖 E 的立方体面积的下确界. 容易看出, 外测度满足 $0 \leq m_* \leq \infty$, 并且任何集合都有外测度, 这是为后面讨论 Lebesgue 测度的准备.

一些例子

例 1.1 $\mathbb{R}^d$ 中至多可数集的外测度为 0.

设 $E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^d$ 可数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 令 Q_j 为以 x_j 为中心, $\varepsilon/2^j$ 为体积的闭立方体, 则

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon, \quad (1.14)$$

由 ε 任意性可得 $m_*(E) = 0$.

例 1.2 闭立方体 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

由于 $R \subset R$, 因此 $m_*(R) \leq |R|$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意覆盖 R 的可数闭立方体组 $\{Q_j\}$, 取开立方体 $S_j \supset Q_j$, 使得 $|S_j| \leq (1 + \varepsilon)|Q_j|$, 则根据 H-B 定理, 这些 S_j 中有限个立方体覆盖 R , 因此

$$|R| \leq \sum_{j=1}^N |S_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \varepsilon) |Q_j| \quad (1.15)$$

根据 ε 的任意性可知 $|R| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$, 取下确界可得 $|R| \leq m_*(R)$, 故 $m_*(R) = |R|$.

例 1.3 开立方体 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

显然有 $m_*(R) \leq |\bar{R}| = |R|$, 对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 取闭立方体 $S \subset R$ 使得 $|S| = (1 - \varepsilon)|R|$, 则任意 R 的覆盖都覆盖 S , 因此

$$(1 - \varepsilon)|R| = |S| = m_*(S) \leq m_*(R) \quad (1.16)$$

由 ε 的任意性可得 $|R| \leq m_*(R)$.

例 1.4 矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

仿照由闭立方体外测度的证明 (扩张 +H-B), 可得 $|R| \leq m_*(R)$, 反过来, 对任意边长为 $1/k$ 的立方体覆盖 Q_j , 设 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ 分别表示包含在 R 内、与 ∂R 有交的矩形集合, 则

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{Q}} |Q_j| \leq |R|, \quad \sum_{Q_j \in \mathcal{Q}'} |Q_j| = k^{-d} O(k^{d-1}) = O(k^{-1}) \quad (1.17)$$

后者成立是因为 R 表面为 $d-1$ 维, 因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |R| + O(1/k). \quad (1.18)$$

由 k 的任意性可得 $m_*(R) \leq |R|$, 得证.

例 1.5 $\mathbb{R}^d$ 的外测度为 ∞ .

外测度的性质

根据外测度的定义, 可以给出如下引理, 这将为后面的一些证明提供便利.

引理 1.3

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在覆盖 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_*(Q_i) \leq m_*(E) + \varepsilon. \quad (1.19)$$

**命题 1.5 (单调性)**

设 $E_1 \subset E_2$, 则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.



证明 E_2 的任何覆盖都是 E_1 的覆盖, 得证.

命题 1.6 (可数次可加性)

若 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则 $m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$.



证明 不妨设 $m_*(E_j) < \infty$, 取覆盖 $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad (1.20)$$

则所有的 $Q_{k,j}$ 构成了 E 的一个覆盖, 因此

$$m_*(E) \leq \sum_{k,j} |Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \varepsilon \quad (1.21)$$

根据 ε 的任意性得证.

下面的命题表明, 外测度可以用任意更大的开集进行逼近.

定理 1.3

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则 $m_*(E) = \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$, 其中 O 为开集.



证明 显然有 $m_*(E) \leq \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$ (单调性). 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, 并且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \leq m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.22)$$

再取开立方体 $Q_j^0 \supset Q_j$, 并且 $|Q_j^0| \leq |Q_j| + \varepsilon/2^{j+1}$, 则开集 $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0$ 覆盖 E , 并且

$$\inf\{m_*(O) : E \subset O\} \leq m_*(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^0| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| + \frac{\varepsilon}{2} \leq m_*(E) + \varepsilon, \quad (1.23)$$

根据 ε 任意性得证.

命题 1.7

设 $E = E_1 \sqcup E_2$, $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.



证明 显然 $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 设 $d(E_1, E_2) > \delta > 0$, 则取边长小于 δ 的立方体覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon \quad (1.24)$$

则存在无交指标集 $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$, 使得

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j, \quad E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j \quad (1.25)$$

因此

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon \quad (1.26)$$

由 ε 任意性得证.

命题 1.8

设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 其中 Q_j 为几乎不相交的立方体 (内部不相交), 则 $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)$.



证明 显然 $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)$; 对任意 $\varepsilon > 0$, 设 $\tilde{Q}_j$ 严格包含在 Q_j 中, 且满足 $|Q_j| \leq |\tilde{Q}_j| + \varepsilon/2^j$, 则对任意 N , $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N$ 两两无交, 因此

$$\sum_{k=1}^N |Q_k| \leq \sum_{k=1}^N m_*(\tilde{Q}_k) + \varepsilon = m_*\left(\bigcup_{k=1}^N \tilde{Q}_k\right) \leq m_*(E). \quad (1.27)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 根据 ε 任意性得证.

上面的结果说明, 若集合可以划分为几乎不相交的立方体的可数并, 则其外测度就是这些立方体外测度之和. 但根据上一节中的结论, 任何开集都可以做这种分割, 因此这与我们的直觉相符. 此外, 该性质也说明了外测度与这种立方体分割的选取无关.

需要注意, 外测度并不能得到 “若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$ ”, 这种性质可以说是 Lebesgue 测度的优秀性质之一.

1.3 可测集与 Lebesgue 测度

可测性实际上是挑选出了一些具有良好性质的集合 (比如可数可加性), 可测性也有许多等价的定义.

定义 1.6 (Lebesgue 测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$, 使得

$$m_*(O - E) \leq \varepsilon, \quad (1.28)$$

则称 E 是 Lebesgue 可测的, 此时定义 E 的 Lebesgue 测度 $m(E) = m_*(E)$.



注 显然地, Lebesgue 测度满足外测度的一切性质.

下面考虑 Lebesgue 测度的一些简单性质.

命题 1.9

任何 $\mathbb{R}^d$ 中的开集都是可测集.



证明 取 $O = E$ 得证.

命题 1.10

若 $m_*(E) = 0$, 则 E 以及其子集 F 均可测.



证明 由于 $0 = m_*(E) = \inf m_*(O)$, $O \supset E$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 O 使得 $m_*(O - E) \leq m_*(O) \leq \varepsilon$, 得证. 对于 $F \subset E$ 同理.

命题 1.11

可测集的可数并仍然可测.



证明 设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 E_j 可测, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 O_j 使得 $m_*(O_j - E_j) \leq \varepsilon/2^j$, 令 $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$, 则 $(O - E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (O_j - E_j)$, $m_*(O - E) \leq \varepsilon$, 得证.

命题 1.12

任何 $\mathbb{R}^d$ 中的闭集都是可测集.



证明 考虑闭球 $B_k = B(0, k)$, 则任何闭集 F 可以表示为可数紧集的并

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F \cap B_k, \quad (1.29)$$

因此只需要证明紧集可测. 设 F 为紧集, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset F$ 使得 $m_*(O) \leq m_*(F) + \varepsilon$, 由于 F 闭, $O - F$ 开, 根据定理 1.2 可知 $O - F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 其中 Q_j 为几乎不相交的闭立方体, 因此对固定的 N , $K = \bigcup_{j=1}^N Q_j \subset O - F$ 为紧集, 从而 $d(K, F) > 0$, $K \cup F \subset O$, 因此

$$m_*(O) \geq m_*(K \cup F) = m_*(F) + m_*(K) = m_*(F) + \sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \quad (1.30)$$

$$\sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \leq m_*(O) - m_*(F) \leq \varepsilon \quad (1.31)$$

令 $N \rightarrow \infty$ 即得 $m_*(O - F) \leq \varepsilon$, 故 F 可测.

注 上面之所以先将问题化归到紧集的形式, 是为了保证其有界性.

上面的证明中略去了一个易证的引理

引理 1.4

设 F, K 分别为闭集与紧集, 且二者无交, 则 $d(F, K) > 0$.

命题 1.13

可测集的补集也是可测的.

证明 设 E 可测, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在开集 $O_n \supset E$ 使得 $m_*(O_n - E) \leq 1/n$, 设 $S = (\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$, 则 $S \subset E^c$, 显然 S 可测 (闭集的可数并), 下证 $E^c - S$ 可测以说明 $E^c = S \cup (E^c - S)$ 可测, 由于

$$(E^c - S) = (S^c - E) \subset (O_n - E), \quad (1.32)$$

因此对任意 n 都有 $m_*(E^c - S) \leq 1/n$, 故 $m_*(E^c - S) = 0$, $E^c - S$ 零测 (可测), 得证.

由上述性质以及 De Morgan 律, 很容易得到另一个性质

命题 1.14

可测集的可数交也是可测的.

Lebesgue 测度的更多性质

Lebesgue 测度一个非常良好的性质就是可数可加性, 即如下定理.

定理 1.4 (可数可加性)

设 $E_1, E_2, \dots$ 为无交可测集, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j). \quad (1.33)$$

证明 Step 1. 假设每个 E_j 都有界. 由 E_j^c 可测的证明过程可知对任意 j , 存在闭集 $F_j \subset E_j$ 使得 $m_*(E_j - F_j) \leq \varepsilon/2^j$. 对任意 N , $F_1, \dots, F_N$ 为无交紧集且均在 E 中, 因此

$$\sum_{j=1}^N m(E_j) \leq \sum_{j=1}^N m(F_j) + \sum_{j=1}^N m(E_j - F_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) + \sum_{j=1}^N m(E_j - F_j) \leq m(E) + \varepsilon, \quad (1.34)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 再由 ε 的任意性可知

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j). \quad (1.35)$$

另一边根据外测度的可数次可加性易得.

Step 2. 考虑一般情形. 取一系列单调递增至无穷的立方体 $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$, 且令 $S_1 = Q_1, S_k = Q_k - Q_{k-1}$, 则 S_k 都有界无交. 定义可测集 $E_{j,k} = E_j \cap S_k$, 则 $E = \bigcup_{j,k} E_{j,k}$, 其中 $E_{j,k}$ 有界且无交, 并且 $E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$ 也为无交并, 因此

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_j \sum_k m(E_{j,k}) = \sum_j m(E_j). \quad (1.36)$$

得证.

下面考虑一种特殊集合的极限.

定义 1.7 (单调集合的极限)

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 满足 $E_k \subset E_{k+1}$, 则定义 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \nearrow E$.

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 满足 $E_k \supset E_{k+1}$, 则定义 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \searrow E$.



推论 1.1

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^d$, 则

1. 若 $E_k \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$.
2. 若 $E_k \searrow E$ 且 $m(E_k) < \infty$, 则 $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$.



注 考虑反例: 若 $E_k = B_k(0)^c$, 则 $E_k \searrow \emptyset$, 但是 $m(E_k) = \infty$.

证明

1. 约定 $E_0 = \emptyset$, 则

$$m(E) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k - E_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k - E_{k-1}) \quad (1.37)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [m(E_k) - m(E_{k-1})] = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k). \quad (1.38)$$

2. 由于 $E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k - E_{k+1})$, 因此

$$m(E_1) = m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} [m(E_k) - m(E_{k+1})] = m(E) + m(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k), \quad (1.39)$$

得证.

在前文的证明中, 用到了许多开集、闭集逼近某个可测集, 如下定理则总结了此类性质.

定理 1.5

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 则对任意 $\varepsilon > 0$:

1. 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m(O - E) \leq \varepsilon$.
2. 存在闭集 $F \subset E$ 使得 $m(E - F) \leq \varepsilon$.
3. 若 $m(E) < \infty$, 则存在紧集 $K \subset E$ 使得 $m(E - K) \leq \varepsilon$.
4. 若 $m(E) < \infty$, 则存在闭矩形的有限交 $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 使得 $m(E \Delta F) \leq \varepsilon$, 其中 $E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$ 称对称差.



证明

1. 可测的定义.

2. 由于 E^c 可测, 因此存在开集 $O \supset E^c$ 使得 $m(O - E^c) \leq \varepsilon$, 若取闭集 $F = O^c \subset E$ 则

$$E - F = E - O^c = O - E^c, \quad m(E - F) = m(O - E^c) \leq \varepsilon. \quad (1.40)$$

3. 取闭集 $F \subset E$ 使得 $m(E - F) \leq \varepsilon/2$, 令 $B_n = B(0, n)$, $K_n = F \cap B_n$, 则 $(E - K_n) \searrow (E - F)$, 根据 $m(E) < \infty$ 可得当 n 充分大时有 $m(E - K_n) \leq \varepsilon$.

4. 取一族闭立方体 $\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m(E) + \varepsilon/2, \quad (1.41)$$

由于 $m(E) < \infty$, 因此存在 $N > 0$ 使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon/2$, 设 $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 则

$$m(E \Delta F) = m(E - F) + m(F - E) \quad (1.42)$$

$$\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j - E\right) \quad (1.43)$$

$$\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| + \sum_{j=1}^N |Q_j| - m(E) \quad (1.44)$$

$$\leq \varepsilon. \quad (1.45)$$

除此之外, 可测集还有一些几何上的性质, 比如

$$m(E + h) = m(E), \quad m(\delta E) = \delta^d m(E), \quad (1.46)$$

其中

$$E + h := \{x \in E : x + h\}, \quad \delta E := \{x \in E : \delta x\}. \quad (1.47)$$

最后以定理的形式给出一个可测的等价定义.

定理 1.6 (Caratheodory)

集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}^d$ 有

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.48)$$

上式称为 Caratheodory 条件.



证明 若 E 满足 Caratheodory 条件, 则取开集 $A = O \supset E$ 可得

$$m_*(O - E) = m_*(O) - m_*(E), \quad (1.49)$$

由于 $m_*(E) = \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $O \supset E$ 使得

$$m_*(O - E) = m_*(O) - m_*(E) \leq \varepsilon, \quad (1.50)$$

故 E 可测.

再假设 E 可测, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m_*(O - E) \leq \varepsilon$, 对于任意 $A \subset \mathbb{R}^d$, 只需证明

$$m_*(A) \geq m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.51)$$

注意到 Caratheodory 条件对 A 可测的情形显然成立, 因此考虑开集 $O \supset A$, 则有

$$m_*(O) = m_*(O \cap E) + m_*(O - E) \quad (1.52)$$

$$\geq m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.53)$$

对左边取下确界得证.

1.3.1 σ -代数与 Borel 集**定义 1.8 (σ -代数)**

设集族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 包含 $\emptyset$, 且对补集、可数交封闭, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个 σ -代数.



$\mathbb{R}^d$ 中最小的 σ -代数为 $\{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$, 最大的 σ -代数为 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. 而 $\mathbb{R}^d$ 中所有可测集也构成了一个 σ -代数. 另一种重要的 σ -代数被称为 Borel σ -代数:

定义 1.9 (Borel 集)

定义 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中所有开集生成的 σ -代数, 则称其中元素为 Borel 集.



由于所有开集都可测, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 包含在所有可测集构成的 σ -代数中, 反之不然, 可以找到一个可测集, 不是 Borel 集.

通过将 Borel 集 “完备化”, 即添加 $\{E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : m(E) = 0\}$, 可以得到 Lebesgue 集.

定义 1.10 (Lebesgue 集)

称 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cup \{E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : m(E) = 0\}$ 为 Lebesgue 集, 即 Borel 集的完备化.

**定义 1.11 (G_δ 集与 F_σ 集)**

称开集的可数交为 G_δ 集, 闭集的可数并为 F_σ 集.



例 1.6 $\mathbb{Q}$ 为 F_σ 集, 因此 $\mathbb{Q}^c$ 为 G_δ 集; 同时, $\mathbb{Q}$ 不是一个 G_δ 集, 若不然, 则 $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 F_δ 集, 并且其中每个集合都没有内点 (否则根据有理数的稠密性可知某个集合必有有理数), 根据 Baire 纲定理可知 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 也无内点, 矛盾.

上面的例子也可以说明: 不存在只在有理点连续的函数.

例 1.7 设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 设 E 为 f 连续点的集合, 则 E 为 G_δ 集.

定义

$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists \delta > 0, \sup_{y, z \in B_\delta(x)} |f(y) - f(z)| < 1/n\}, \quad (1.54)$$

则 U_n 为开集 (对任意 $x \in U_n$, 取比 δ 更小的球, 则球中点均在 U_n 中), 进一步有

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad (1.55)$$

即 E 为 G_δ 集.

推论 1.2

集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测

1. 当且仅当 E 与一个 G_δ 集相差一个零测集.
2. 当且仅当 E 与一个 F_σ 集相差一个零测集.



证明 若 E 满足任意一个条件, 则其显然可测; 假设 E 可测, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在开集 $O_n \supset E$, 使得 $m(O_n - E) \leq 1/n$, 则 $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 为一个包含 E 的 G_δ 集, 并且 $(S - E) \subset (O_n - E)$, 因此对任意 n 都有

$$m(S - E) \leq m(O_n - E) \leq 1/n, \quad (1.56)$$

故 $m(S - E)$ 零测.

另外, 也存在闭集 $F_n \subset E$, 使得 $m(E - F_n) \leq 1/n$, 因此 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 为包含在 E 中的闭集且 $(E - F) \subset (E - F_n)$, 因此

$$m(E - F) \leq m(E - F_n) \leq 1/n \quad (1.57)$$

关于 Borel 集, 还有一些性质.

引理 1.5

设 χ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 σ -代数, 函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(U) \in \chi$, 则对任意 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $f^{-1}(E) \in \chi$.



证明 令

$$\chi_1 = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \chi\}, \quad (1.58)$$

则 χ_1 也是一个 σ -代数, 并且包含 $\mathbb{R}$ 中所有开集, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \chi_1$, 得证.

这一定程度上反映了 Borel 集的表现可以由开集决定 (毕竟根据定义, Borel 集由开集生成),

推论 1.3

若 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\chi = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 则对任意 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.



但是反过来, 若函数 f 使得 Borel 集的原像还是 Borel 集, 并不能保证 f 的连续性, 比如考虑 Dirichlet 函数 (或者某个示性函数).

1.3.2 不可测集的例子

下面构造一个集合, 并证明它不可测.

考虑 $[0, 1]$ 上的等价关系 (不难验证): $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \mathbb{Q}$, 则 $[0, 1]$ 被划分为等价类的无交并

$$[0, 1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \quad (1.59)$$

借助**选择公理**, 从每个等价类中选出一个代表元 x_{α} 构成集合 $\mathcal{N}$, 这就构造出了 **Vitalie 集**.

定理 1.7

Vitalie 集 $\mathcal{N}$ 是不可测的.



证明 假设 $\mathcal{N}$ 可测, 设 $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ 为 $[-1, 1]$ 上的所有有理数, 则平移后的集合 $\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$ 也可测, 并且 $m(\mathcal{N}) = m(\mathcal{N}_k)$,

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1, 2] \quad (1.60)$$

断言 $\mathcal{N}_k$ 两两无交, 否则若 $x_{\alpha} + r_k = x_{\beta} + r_l$, 则 $x_{\alpha} \sim x_{\beta}$, 与 $\mathcal{N}$ 只包含每个等价类的一个元素矛盾. 因此由可数可加性得

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leq 3 \quad (1.61)$$

无论 $m(\mathcal{N})$ 为何值都矛盾.

选择公理

构造 Vitalie 集时用到了**选择公理**, 它看似十分显然

公理 1.1 (选择公理)

设 E 为集合, $\{E_{\alpha}\}$ 为 E 的非空子集, 则存在选择函数 $f: \alpha \mapsto x_{\alpha} \in E_{\alpha}$.



注 换句话说, 选择公理保证了我们可以从一系列集合中选出一个代表元.

选择公理在许多数学证明中都有使用, 比如证明**良序原理**.

定义 1.12 (全序集)

集合 E 称为全序的, 若其满足

1. 对任意 x 有 $x \leq x$.
2. 对任意不同的 $x, y \in E$, 有且仅有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 中一者成立.
3. 若 $x \leq y, y \leq z$, 则 $x \leq z$.



我们称 E 为良序的, 若其中存在一个全序关系, 且任何子集 $A \subset E$ 中都有最小元, 即存在 $x_0 \in A$ 使得对任意 $x \in A$ 都有 $x_0 \leq x$. 一个简单良序集的例子是 $\mathbb{Z}_+$, 而 $\mathbb{R}_+$ 在通常意义的序关系下不是良序的, 但根据良序原理, 其中也能找到新的序关系使之“良序化”.

定理 1.8 (良序原理)

任何集合可以被“良序化”.



显然良序原理蕴含选择公理: 从任何子集中都可以选出那个最小元; 但反之亦然.

定理 1.9

选择公理蕴含良序原理.

**证明**

在大多情况下, 我们承认选择公理, 进而承认良序原理.

1.4 可测函数

在可测集的基础上, 进一步考虑积分理论的一大重点: 可测函数.

1.4.1 可测函数及基本性质

本节考虑扩充实数系, 即 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 则任何函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 都满足

$$-\infty \leq f(x) \leq \infty, \quad (1.62)$$

不过大多情况下, $f^{-1}(\infty)$ 为零测集. 称 f 为**有限值 (finite-valued)** 的, 当且仅当对任意 x 有 $-\infty < f(x) < \infty$.

定义 1.13 (可测函数)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\} \quad (1.63)$$

也是可测集, 则称 f 为可测函数.



注 简便起见, $\{x \in E : f(x) < a\}$ 可简写为 $\{f < a\}$.

借助一些小技巧¹, 可以得到一些可测函数的等价定义², 若记 $\{f \leq a\} = \{x \in E : f(x) \leq a\}$, 则

$$\{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq a - 1/k\}, \quad \{f \geq a\} = \{f < a\}^c \quad (1.64)$$

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + 1/k\}, \quad \{f > a\} = \{f \leq a\}^c, \quad (1.65)$$

¹这里的小技巧非常重要, 在实分析中具体刻画满足某些性质的集合时常用, 其归根为两条: 右开边可由右闭内逼近, 右闭边可由右开外逼近 (左侧同理)

²这里有些小问题, 忽略了取无穷值的集合, 但是当 f 几乎处处有限时是正确的.

也就是说 $\{f < a\}, \{f \leq a\}, \{f > a\}, \{f \geq a\}$ 四个集合的可测性是等价的, 进一步, 对

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} - \{f \geq a\} \quad (1.66)$$

等四个集合也有同样结论. 事实上, 可测函数还可作如下更一般的定义:

命题 1.15

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数, 当且仅当对任意开集 $E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E)$ 可测.



证明 只需证明若 f 可测, 则 $f^{-1}(E)$ 可测, 根据 $\mathbb{R}$ 中开集的结构定理, $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, 因此

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((a_i, b_i)), \quad (1.67)$$

根据可测函数的等价刻画, 得证.

借助 $\mathbb{R}$ 的一些拓扑性质, 可以得到如下命题.

命题 1.16

有限值函数 f 可测, 当且仅当任意开集 O 的原像 $f^{-1}(O)$ 可测, 也当且仅当任意闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 可测.



推论 1.4

若 f 为 $\mathbb{R}^d$ 中的连续函数, 则 f 可测且有限值, 并且若 Φ 也连续, 则 $\Phi \circ f$ 也可测.



证明 注意到对于连续函数, 开集/闭集的原像仍为开集/闭集.

命题 1.17

设 $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ 为一列可测函数, 则

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (1.68)$$

都是可测的.



证明 只需注意到

$$\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\}, \quad \{\inf_n f_n > a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\}, \quad (1.69)$$

以及

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_k \{\sup_{n \geq k} f_n\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_k \{\inf_{n \geq k} f_n\}, \quad (1.70)$$

即得.

推论 1.5

设 $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ 为一列可测函数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, 则 f 也是可测的.



证明 只需注意到极限存在当且仅当上极限等于下极限即得.

命题 1.18

设 f, g 为可测函数, 则

1. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, f^k 都可测.
2. 若 f, g 都是有限值的, 则 $f + g, fg$ 都可测.



证明

1. 注意到

$$\{f^k > a\} = \begin{cases} \{f > a^{1/k}\}, & 2 \nmid k \\ \{f > a^{1/k}\}, & a \geq 0, 2|k \end{cases} \quad (1.71)$$

或者将 f^k 看作连续函数 $\Phi(x) = x^k$ 与 f 的复合也可证 (其实这种思路更好些)。

2. 断言:

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > a - r\} \cap \{g > r\}, \quad (1.72)$$

左边包含右边是显然的, 假设 $x \in \{f + g > a\}$, 由于 g 取有限值, 因此必然存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $g(x) > r$ 且 $|g(x) - r|$ 非常小, 使得同时有 $f(x) + r > a$, 即 $f(x) > a - r$, 故右边包含左边。

根据极化恒等式有

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2], \quad (1.73)$$

即得 fg 可测。

定义 1.14 (几乎处处相等)

称 f, g 在 E 上几乎处处相等, 若集合 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ 为零测集, 简记为 $f = g, a.e.$



注 上述定义赋予了“几乎处处”的严谨定义, 这一短语可以推广: 称某一陈述“几乎处处”正确, 若其仅在某个零测集上不成立。

不难验证, 几乎处处相等是一个等价关系 (并且这种等价性在函数的加法与乘法下是良定的), 这种等价关系可以传递一些性质, 不难验证:

命题 1.19

若 f 可测, $g = f, a.e.$, 则 g 也可测; 若 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 可测, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), a.e.$, 则 f 也可测。



1.4.2 由阶梯函数与简单函数逼近

本节进一步讨论可测函数的性质, 一个重要的结果是它被一系列较好的函数逼近。

定义 1.15 (示性函数)

对于集合 $E \subset \mathbb{R}^d$, 定义示性函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \quad (1.74)$$



借助示性函数, 可以描述 $\mathbb{R}$ 中考虑过的“阶梯函数”, 并将其推广到 $\mathbb{R}^d$ 。

定义 1.16 (阶梯函数)

定义 $\mathbb{R}^d$ 中的阶梯函数为

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{R_k}, \quad (1.75)$$

其中 R_k 为 $\mathbb{R}^d$ 中的矩形, $a_k \in \mathbb{R}$ 。



上面的定义可以推广, 若设 $E_1, \dots, E_k$ 为可测集, 则称函数

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \quad (1.76)$$

为“简单函数” (simple function)。

定理 1.10

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数, 则存在递增的简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 收敛到 f , 即

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x). \quad (1.77)$$



证明 设 Q_N 为以原点为中心, 边长为 N 的立方体, 则考虑截断函数

$$F_N(x) = \min\{N, f\chi_{Q_N}\} = \begin{cases} f(x), & x \in Q_N, f(x) \leq N \\ N, & x \in Q_N, f(x) > N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.78)$$

易知 $F_N(x) \rightarrow f(x)$, 再将 Q_N 作如下划分

$$E_{k,M} = \{x \in Q_N : k/M < F_N \leq (k+1)/M\}, \quad 0 \leq k < MN \quad (1.79)$$

由此可知 $0 \leq F_N(x) - (k/M)\chi_{E_{k,M}} \leq 1/M$, 因此若构造简单函数

$$F_{N,M}(x) = \sum_{k=0}^{MN} \frac{k}{M} \chi_{E_{k,M}}(x), \quad (1.80)$$

则对任意 x 都有 $0 \leq F_N(x) - F_{N,M}(x) \leq 1/M$. 再令 $\varphi_N(x) = F_{N,2N}$, 就有 $0 \leq F_N(x) - \varphi_N(x) \leq 1/N$, 因此 φ_N 收敛到 f (递增是显然的).

上述证明中的 $E_{k,M}$ 实际上是分割了值域, 这与 Lebesgue 积分的想法类似.

上面的逼近对非负可测迈出了第一步, 下面将此推广到一般可测函数中.

定理 1.11

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}$, 使得

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x). \quad (1.81)$$

特别地, 有 $|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$.



证明 作分解 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 其中

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad (1.82)$$

则 f^+, f^- 均为非负可测函数, 因此存在非负简单函数 $\{\varphi_k^+\}, \{\varphi_k^-\}$ 分别递增收敛到 f^+, f^- , 将其组合为 $\varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$, 则显然 φ_k 收敛到 f , 并且 $|\varphi_k| = \varphi_k^+ + \varphi_k^-$, 因此 $|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$, 得证.

下面考虑进一步的结果, 即利用性质更好的函数: 阶梯函数进行逼近. 证明分为两部分, 首先证明简单函数 (或者说示性函数) 可被阶梯函数逼近, 再证明可测函数可以被阶梯函数逼近 (需要用到 Egorov 定理).

定理 1.12

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 则存在一系列阶梯函数 $\{\psi_k\}$ 几乎处处收敛到 f .



证明 首先证明定理对每个 $f = \chi_E$ (E 为可测集) 成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在立方体 $Q_1, \dots, Q_N$ 使得

$$m(E \triangle \bigcup_{j=1}^N Q_j) \leq 2\varepsilon, \quad (1.83)$$

若将这些立方体扩展为网格, 则存在几乎无交的闭矩形 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$ 使得 $\bigcup_{j=1}^N Q_j = \bigcup_{j=1}^M \tilde{R}_j$, 若取这些矩形的内部 $R_j \subset \tilde{R}_j$, 则 $m(E \triangle \bigcup_{j=1}^M R_j) \leq 2\varepsilon$, 因此对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在阶梯函数 $\psi(x)$ 使得集合 $E_k = \{f \neq \psi_k\}$ 满足 $m(E_k) \leq 2^{-k}$, 若取

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j, \quad (1.84)$$

则 $m(F) = 0$ (可以直接算, 似乎也可以用 Borel-Cantelli 引理), 也就是说在零测集 F 外均有 $\psi_k(x) \rightarrow f(x)$, 即几乎处处收敛.

对于一般的可测函数 f , 存在简单函数列 $\{\psi_k\}$ 逐点收敛到 f , 对于每个 ψ_k , 存在阶梯函数 $\varphi_{k,i}$ 几乎处处收敛到 ψ_k . 由于 $m(\text{supp } \psi_k) < \infty$, 根据 Egorov 定理, 存在可测集 $E_k \subset \text{supp } \psi_k$ 满足 $m(E_k) \leq 2^{-k}$, 且在 E_k^c 中 $\varphi_{k,i} \Rightarrow \psi_k$, 因此存在 i_k , 使得在 E_k^c 中一致成立

$$|\varphi_{k,i_k} - \psi_k| < \frac{1}{k}, \quad (1.85)$$

考虑

$$E = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j, \quad (1.86)$$

则 $m(E) = 0$, 并且在 E^c 中有 $\varphi_{k,i_k} \rightarrow f$, 重新记 φ_{k,i_k} 为 φ_k , 则 φ_k 几乎处处收敛到 f .

1.4.3 Littlewood 三原理

前面讨论的可测集与可测函数带来了一些新的理论, 这些新理论与过去我们熟悉的对象之间存在一些值得讨论的联系, Littlewood 曾给出如下三条原理

1. 每个可测集都近乎区间的有限并.
2. 每个可测函数都近乎连续.
3. 每个收敛可测函数列都近乎一致收敛.

其中使用了“近乎”这样模糊的短语, 需要对此进行更严格地表述. 注意到其中第一条实际上就是定理 1.5 的 4, 而其余二者分别由下面两定理给出.

首先考虑一个引理, 这是几乎处处收敛的等价定义, 或者说更细致的刻画.

引理 1.6

设 f_n, f 为可测函数, E 为可测集, 定义

$$E_n(\varepsilon) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad (1.87)$$

则 f_n 在 E 上几乎处处收敛到 f 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$,

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon)) = 0. \quad (1.88)$$

证明 定义

$$N = \{x \in E : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}, \quad (1.89)$$

则 $f_n \rightarrow f, a.e.$ 当且仅当 $m(N) = 0$, 断言

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(1/k). \quad (1.90)$$

对任意 $x \in N$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 子列 $\{n_i\}$ 使得 $x \in E_{n_i}(\varepsilon_0)$, 也即 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon_0)$, 因此 N 包含于右边.

反过来, 若 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(1/k)$, 则存在子列 $\{n_i\}$ 使得 $x \in E_{n_i}(1/k)$, 即

$$|f_{n_i}(x) - f(x)| \geq 1/k, \quad (1.91)$$

因此在 x 处 $f_n \not\rightarrow f$, 即 $x \in N$, 可知 N 包含右边, 得证.

定理 1.13 (Egorov)

设 $\{f_k\}$ 为可测集 $m(E) < \infty$ 上的一列可测函数, 且在 E 中 $f_k \rightarrow f, a.e.$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ 且在 A_ε 中 $f_k \Rightarrow f$.

证明 [课上的证法] 根据条件可知对任意 $\varepsilon > 0$,

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon)) = 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} E_n(\varepsilon)\right) = 0, \quad (1.92)$$

考虑该集合的补集, 可得

$$x \in \bigcap_{n=i}^{\infty} (E_n(\varepsilon))^c \iff \forall n \geq i: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (1.93)$$

对任意 $\varepsilon_0 > 0$, $k \geq 1$, 取 i_k 使得

$$m(F_k) := m\left(\bigcup_{n=i_k}^{\infty} E_n(1/k)\right) \leq \varepsilon_0/2^{k+1}, \quad (1.94)$$

则对任意 $x \in F_k^c$, $n \geq i_k$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$, 定义

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \quad m(F) \leq \varepsilon_0/2, \quad (1.95)$$

则对任意 $k \geq 1$, 取上面的 i_k 可使得对任意 $n \geq i_k$, $x \in F^c \subset F_k^c$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| < 1/k, \quad (1.96)$$

因此 f_n 在 F^c 中一致收敛到 f , 再取 F 中的一个测度差小于 $\varepsilon_0/2$ 的闭集 F_{ε_0} , 即得证.

证明 [Stein 中的证法] 不妨设在 E 中有 $f_k \rightarrow f$ (否则用符合条件的 E' 替换 E), 定义

$$E_k^n = \{x \in E: |f_j(x) - f(x)| < 1/n, \forall j > k\} \quad (1.97)$$

$$= \bigcap_{j=k+1}^{\infty} \{x \in E: |f_j(x) - f(x)| < 1/n\}, \quad (1.98)$$

则 E_k^n 关于 k 单调递增收敛到 E , 因此存在 $k_n \in \mathbb{N}$ 使得 $m(E - E_{k_n}^n) < 1/2^n$, 并且对任意 $j > k_n$ 有

$$\|f_j - f\|_{E_{k_n}^n} < 1/n, \quad (1.99)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 N 使得 $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$, 再令 $\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \geq N} E_{k_n}^n$, 则

$$m(E - \tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E - E_{k_n}^n) < \varepsilon/2, \quad (1.100)$$

对于任意 $\delta > 0$, 取 $n \geq N$ 且 $1/n < \delta$, 则对任意 $j > k_n$ 都有

$$\|f_j - f\|_{\tilde{A}_\varepsilon} \leq \|f_j - f\|_{E_{k_n}^n} < 1/n < \delta, \quad (1.101)$$

故在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 中 $f_k \rightrightarrows f$, 在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 中取闭集 A_ε , 使得 $m(\tilde{A}_\varepsilon - A_\varepsilon) < \varepsilon/2$, 即得证.

定理 1.14 (Lusin)

设 f 为定义在 E 上的有限值可测函数, $m(E) < \infty$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, $m(E - F_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 使得 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续. 

证明 [课上的证法] 取阶梯函数列 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A \subset E$, $m(A^c) \leq \varepsilon/2$, 并且在 A 中 $f_n \rightrightarrows f$. 再根据阶梯函数的性质, 对每个 f_n , 存在零测集 $E_n \subset E$ 使得 f_n 在 E_n^c 连续, 令

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(F) = 0, \quad (1.102)$$

则 $\{f_n|_F\}$ 为连续函数列, 其在 $A \cap F^c$ 的一致极限 $f|_F$ 在 $A \cap F^c$ 中连续, 最后取闭集 $F_\varepsilon \subset A \cap F^c$ 中满足 $m((A \cap F^c) - F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$, 则

$$m(E - F_\varepsilon) = m((E - (A \cap F^c)) \cup ((A \cap F^c) - F_\varepsilon)) \quad (1.103)$$

$$\leq m(E - (A \cap F^c)) + m((A \cap F^c) - F_\varepsilon) \quad (1.104)$$

$$\leq \varepsilon, \quad (1.105)$$

得证.

证明 [Stein 中的证法] 设阶梯函数列 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则存在集合 E_n , $m(E_n) < 1/2^n$, 使得 f_n 在 E_n 外连续, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $A_{\varepsilon/3}$ 使得在其中 $f_n \rightarrow f$, 并且 $m(E - A_{\varepsilon/3}) \leq \varepsilon/3$.

取充分大的 N 使得 $\sum_{n \geq N} 2^{-n} < \varepsilon/3$, 考虑集合

$$F' = A_{\varepsilon/3} - \bigcup_{n \geq N} E_n, \quad (1.106)$$

则 $\{f_n\}$ 在 F' 连续, 其一致极限 f 也在 F' 连续, 再取闭集 $F_\varepsilon \subset F'$ 使得 $m(F' - F_\varepsilon) < \varepsilon/3$, 得证.

事实上, 由于连续性是局部概念, 因此 Lusin 定理对无限测度集也成立, 这时只需考虑

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (Q_i \cap E), \quad (1.107)$$

其中每个 Q_i 为有限测度集, 则根据上述定理, 存在 $A_i \subset E \cap Q_i^\circ$ 满足

$$m((E \cap Q_i) - A_i) \leq \varepsilon/2^i, \quad (1.108)$$

且 f 在 A_i 连续, 考虑这些集合的并, 则 f 在该集合中连续, 并且

$$m(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} ((E \cap Q_i) - A_i)\right) \leq \varepsilon, \quad (1.109)$$

得证.

1.5 Brunn-Minkowski 不等式

本节讨论对可测集和的估计, 首先定义集合的和.

定义 1.17 (A+B)

设集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$, 则定义

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \quad (1.110)$$

命题 1.20

设有集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$, 则

1. 若 A, B 中有一个为开集, 则 $A + B$ 也是开集.
2. 若 A, B 均为闭集, 则 $A + B$ 可测.

证明

1. 不妨设 A 为开集, 则

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b), \quad (1.111)$$

而开集的平移还是开集, 开集的任意并还是开集.

2. 仿照证明闭集可测的过程, 首先证明: 若 A 为紧集, B 为闭集, 则 $A + B$ 为闭集. 对任意收敛点列 (设 $z_n \rightarrow z < \infty$)

$$z_n = a_n + b_n, \quad a_n \in A, b_n \in B, \quad (1.112)$$

根据紧集中的 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{a_n\}$ 存在收敛子列, 不妨就记为其自身, 并记极限为 a , 则综上所述可知

$$b_n = z_n - a_n \rightarrow z - a = b, \quad (1.113)$$

根据闭集的性质易得 $z = x + y \in A + B$, 故 $A + B$ 为闭集, 可测. 对于一般的 A , 利用立方体分割可得

$$A + B = \bigcup_{k=1}^{\infty} [(Q_k \cap A) + B] \quad (1.114)$$

为 F_σ 集, 故 $A + B$ 可测.

如果希望通过 A, B 的测度对 $A + B$ 的测度进行估计 (这里假定 $A + B$ 可测), 首先可以发现其上界并不好估计, 下例可以构造出两个零测集 A, B , 其和不是零测集.

例 1.8 设在 $\mathbb{R}^2$ 中 $A = I \times \{0\}$, $B = \{0\} \times I$, 则 $A + B = I^2$, 但 $m(A) = m(B) = 0$, $m(A + B) = 1$.

如果估计下界, 则可以猜想是否有

$$m(A + B)^\alpha \geq c_\alpha [m(A)^\alpha + m(B)^\alpha] \quad (1.115)$$

成立, 其中 $\alpha > 0$, c_α 是与 A, B 无关的常数. 这种思想来自“凸性”, 若 $A \subset \mathbb{R}^d$ 为凸集, 即对任意 $x, y \in A, t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in A$, 则 $A + \lambda A = (1 + \lambda)A$, 此时成立

$$m(A + \lambda A) = (1 + \lambda)^d m(A) \quad (1.116)$$

对于 $\alpha \geq 1/d$ 有 $(1 + \lambda)^{d\alpha} \geq 1 + \lambda^{d\alpha}$, 因此

$$m(A + \lambda A)^\alpha \geq m(A)^\alpha + m(\lambda A)^\alpha \quad (1.117)$$

如果取 $\alpha = 1/d$, 并用一般的集合 B 代替 λA , 则可以得到如下定理.

定理 1.15 (Brunn-Minkowski)

若 $A, B, A + B \subset \mathbb{R}^d$ 均可测, 则成立

$$m(A + B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}. \quad (1.118)$$

定理的证明分为五步: 矩形、可数矩形、开集、紧集、一般情形, 且不妨设 $m(A), m(B) > 0$.

证明 Step 1. 若 A, B 均为矩形, 边长分别为 $\{a_j\}, \{b_j\}$, 则需要证明

$$\left(\prod_{j=1}^d (a_j + b_j) \right)^{1/d} \geq \left(\prod_{j=1}^d a_j \right)^{1/d} + \left(\prod_{j=1}^d b_j \right)^{1/d} \quad (1.119)$$

根据均值不等式

$$\left(\prod_{j=1}^d \frac{a_j}{a_j + b_j} \right)^{1/d} + \left(\prod_{j=1}^d \frac{b_j}{a_j + b_j} \right)^{1/d} \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{a_j}{a_j + b_j} + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{b_j}{a_j + b_j} = 1 \quad (1.120)$$

移项即证.

Step 2. 下面考虑 A, B 为 (内部无交) 矩形可数并的情形, 只需考虑有限个 (证毕取极限即可), 根据可测集的平移性质, 可以设 $A_- = A \cap \{x_j \leq 0\}$, $A_+ = A \cap \{x_j \geq 0\}$, 则 $A = A_- \cup A_+$, $B = B_- \cup B_+$, 以及保证

$$\frac{m(B_\pm)}{m(B)} = \frac{m(A_\pm)}{m(A)}, \quad (1.121)$$

而 $A + B \supset (A_+ + B_+) \sqcup (A_- + B_-)$, 因为它们分布在不同区域, 因此有

$$m(A + B) \geq m(A_+ + B_+) + m(A_- + B_-) \quad (1.122)$$

$$\geq [m(A_+)^{1/d} + m(B_+)^{1/d}]^d + [m(A_-)^{1/d} + m(B_-)^{1/d}]^d \quad (1.123)$$

$$= m(A_+) \left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)} \right)^{1/d} \right]^d + m(A_-) \left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)} \right)^{1/d} \right]^d \quad (1.124)$$

$$= [m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}]^d \quad (1.125)$$

得证.

Step 3. 接着考虑 A, B 为有限测度开集的情形, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在几乎无交的矩形并 $A_\varepsilon \subset A, B_\varepsilon \subset B$ 使得

$$m(A) \leq m(A_\varepsilon) + \varepsilon, \quad m(B) \leq m(B_\varepsilon) + \varepsilon \quad (1.126)$$

而 $A + B \supset A_\varepsilon + B_\varepsilon$, 因此

$$m(A + B) \geq m(A_\varepsilon + B_\varepsilon) \geq [m(A_\varepsilon)^{1/d} + m(B_\varepsilon)^{1/d}]^d \geq [(m(A) - \varepsilon)^{1/d} + (m(B) - \varepsilon)^{1/d}]^d \quad (1.127)$$

根据 ε 任意性得证.

Step 4. 再考虑 A, B 为紧集的情形, 令开集 $A^\varepsilon = \{x : d(x, A) < \varepsilon\}$, 则 $A^\varepsilon \searrow A$, 对于 $B^\varepsilon, (A + B)^\varepsilon$ 同理, 并且由于

$$A + B \subset A^\varepsilon + B^\varepsilon \subset (A + B)^{2\varepsilon}, \quad (1.128)$$

因此

$$m(A + B)^{2\varepsilon} \geq m(A^\varepsilon + B^\varepsilon) \geq [m(A^\varepsilon)^{1/d} + m(B^\varepsilon)^{1/d}]^d \quad (1.129)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得.

Step 5. 对于一般的可测集 $A, B, A + B$, 根据定理 1.5, 借助包含于其中的紧集进行逼近即证.

第2章 积分理论

2.1 Lebesgue 积分

本节通过如下四步讨论建立基本的 Lebesgue 积分理论：

1. 简单函数 (simple function) .
2. 支撑在有限测度集上的有界函数.
3. 非负函数.
4. 一般可积函数.

Step 1. 简单函数 (simple function)

在上一章中，简单函数定义为

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}(x), \quad (2.1)$$

其中 E_k 均为有限测度集. 注意到同一简单函数可能会有不同表示 (比如考虑不同区域的重叠、取同值区域的分解等), 为了避免这方面影响, 可以考虑其**规范形式 (canonical form)**, 注意到 φ 仅取到有限值 $c_1, \dots, c_M$, 因此令 $F_k = \{x : \varphi(x) = c_k\}$, 则所有 F_k 两两无交, c_k 两两不同, 且 $\varphi = \sum_{k=1}^M c_k \chi_{F_k}$, 在此基础上可以定义 Lebesgue 积分

定义 2.1 (Lebesgue 积分)

设 $\varphi = \sum_{k=1}^M c_k \chi_{F_k}(x)$ 为简单函数 (规范形式), 则定义其 Lebesgue 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^M c_k m(F_k). \quad (2.2)$$



注

1. 若 E 为有限测度集, 则 $\varphi \chi_E$ 也是简单函数, 因此可以定义 φ 在 E 上的积分为

$$\int_E \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \chi_E(x) dx. \quad (2.3)$$

2. 有时为了强调积分依赖 Lebesgue 测度, 积分也表示为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dm(x), \quad (2.4)$$

但简便起见, 有时候也会用 $\int \varphi(x) dx$ 或 $\int \varphi$ 表示 φ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的积分.

下面讨论积分的一些性质.

命题 2.1

简单函数的积分具有如下性质:

1. 良定性: 若 $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}$ 为简单函数 (未必是规范形式), 则

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^N a_k m(E_k). \quad (2.5)$$

2. 线性性: 若 φ, ψ 为简单函数, $a, b \in \mathbb{R}$ 则

$$\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi. \quad (2.6)$$

3. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi. \quad (2.7)$$

4. 单调性: 若两个简单函数满足 $\varphi \leq \psi$, 则

$$\int \varphi \leq \int \psi. \quad (2.8)$$

5. 三角不等式: 若 φ 为简单函数, 则 $|\varphi|$ 也是简单函数, 且有

$$\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi|. \quad (2.9)$$



证明

1. 设 $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}$, 若 E_k 两两无交 (但不保证 a_k 两两不同), 则将相同的 a_k 归拢可知命题成立; 若 E_k 不两两无交, 则可以将 $\{E_k\}$ 有限划分为两两无交的 $\{E'_j\}$, 定义

$$a'_j = \sum \{a_k : E_k \supset E'_j\}, \quad (2.10)$$

则显然有 $\varphi = \sum_{j=1}^n a'_j \chi_{E'_j}$, 根据无交情况的讨论可知

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^n a'_j m(E'_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{E_k \supset E'_j} a_k m(E'_j) = \sum_{k=1}^N \sum_{E'_j \subset E_k} a_k m(E'_j) = \sum_{k=1}^N a_k m(E_k). \quad (2.11)$$

上述求和号的交换可直接考虑其求和总对象 (或考虑某种记重数的并), 得证.

2. 有限集合可以进行一定分割, 使得取值恰好 “对应”, 此时满足线性性, 再根据 1 的良好性得证.
 3. 注意到 $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$.
 4. 注意到 $\psi - \varphi$ 为简单函数且取非负值.
 5. 直接利用 $\mathbb{R}$ 中三角不等式证明

$$\left| \int \varphi \right| = \left| \sum_{k=1}^N a_k m(E_k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| m(E_k) = \int |\varphi|. \quad (2.12)$$

最后再给出一个简单积分的一个简单性质: 若 f, g 为几乎处处相等的简单函数, 则有 $\int f = \int g$, 事实上, 这种性质对后面的几种函数都适用.

Step 2. 支撑在有限测度集上的有界函数

定义 2.2 (支集)

定义函数 f 的支集为

$$\text{supp } f = \{x : f(x) \neq 0\}. \quad (2.13)$$

称 f 支撑在集合 E 上, 若对任意 $x \notin E$ 都有 $f(x) = 0$.



特别当 f 为可测函数时, $\text{supp } f = \{f < 0\} \cup \{f > 0\}$ 也是可测集. 本节主要讨论对象就是满足

$$m(\text{supp } f) < \infty \quad (2.14)$$

的有界可测函数.

上一章定理 1.11 表明, 若 f 为有界可测函数 (支撑在 E), 则存在有界简单函数列 $\{\varphi_n\}$ (支撑在 E) 满足

$$|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|, \quad \varphi_n(x) \rightarrow f(x). \quad (2.15)$$

借助这种观点, 可以将 Lebesgue 积分进行一些推广.

引理 2.1

设 f 有界且支撑在有限测度集 E 上, $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 E 上的简单函数列, 以 M 为界, 并且有 $\varphi_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$, 则

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n$ 存在.
2. 若 $f = 0, a.e.$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = 0$.



如果在 E 中有 $\varphi_n \rightrightarrows f$, 则引理易证, 回顾 Littlewood 三原理: 每个收敛可测函数列都近乎一致收敛, 因此借助 Egorov 定理可以完成证明.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 且在 A_ε 中 $\varphi_n \rightrightarrows f$, 令 $I_n = \int \varphi_n$, 则有

$$|I_n - I_m| \leq \int_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \quad (2.16)$$

$$= \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx + \int_{E-A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \quad (2.17)$$

$$\leq \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx + 2M\varepsilon \quad (2.18)$$

根据一致收敛性, 只要 m, n 充分大, 在 A_ε 中中就一致有 $|\varphi_n - \varphi_m| < \varepsilon$, 因此

$$|I_n - I_m| \leq (m(E) + 2M)\varepsilon, \quad (2.19)$$

得证. 引理的第二部分只需重复上述过程可得 $|I_n| \leq (m(E) + M)\varepsilon$, 得证.

定义 2.3 (Lebesgue 积分)

对于支撑在有限测度集上的有界函数 f , 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n, \quad (2.20)$$

其中 $\{\varphi_n\}$ 满足: $|\varphi_n| \leq M$; φ_n 支撑在 $\text{supp}(f)$ 上; $\varphi_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$.



注 根据前述引理, 上述极限是存在的; 若假设有两个满足条件的函数列 $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$, 则 $\varphi_n - \psi_n \rightarrow 0, a.e.$, 因此根据引理可知二者积分差的极限为 0, 因此上面的定义是良好的.

容易验证, 如此推广后的积分仍满足上一步验证过的诸多性质.

命题 2.2

设 f, g 为支撑在有限测度集上的有界函数, 则其积分具有如下性质:

1. 线性性: 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 则

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g. \quad (2.21)$$

2. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f. \quad (2.22)$$

3. 单调性: 若 $f \leq g$, 则

$$\int f \leq \int g. \quad (2.23)$$

4. 三角不等式: $|f|$ 有界, 同样支撑在有限测度集上, 并且

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|. \quad (2.24)$$



下面给出一个重要的收敛定理.

定理 2.1 (有界收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为一列可测函数, 有公共的界 M , 并且都支撑在有限测度集 E 上, 并且 $f_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$, 则 f 也可测、有界、支撑在 E 上 ($a.e.$) 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| = 0, \quad \int f_n \rightarrow \int f. \quad (2.25)$$

♡

证明 易知 f 在 E 上几乎处处有界 M , 并且在 E 外几乎处处为 0, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$, $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 使得在 A_ε 中 $f_n \rightrightarrows f$, 因此对充分大的 n 有 $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, 即得

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{E - A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \quad (2.26)$$

$$\leq m(E)\varepsilon + 2Mm(E - A_\varepsilon) \quad (2.27)$$

$$\leq \varepsilon(m(E) + 2M) \quad (2.28)$$

得证.

上面的定理隐含了积分与极限运算的交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad (2.29)$$

这种交换在 Riemann 积分中要求是较为严苛的, 而在 Lebesgue 积分中要宽松些.

推论 2.1

沿用上一定理的记号, 若 $f \geq 0$, 有界且支撑在有限测度集 E 上, 且 $\int f = 0$, 则 $f = 0, a.e.$

♡

证明 定义 $E_k = \{x \in E : f(x) \geq 1/k\}$, 则 $k^{-1}\chi_{E_k}(x) \leq f(x)$, 根据积分的单调性可知

$$k^{-1}m(E_k) \leq \int f = 0, \quad (2.30)$$

由此对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $m(E_k) = 0$, 而 $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 因此该集合零测, $f = 0, a.e.$

在开始对非负函数的讨论前, 暂且回到 Riemann 积分, 证明 Lebesgue 积分确实是 Riemann 积分的一个推广, 即闭区间上 Riemann 可积必定 Lebesgue 可积.

定理 2.2

设 f 为 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x) dx, \quad (2.31)$$

即两种积分意义下的结果相同.

♡

注 在数学分析中证明过, f 在 $[a, b]$ Riemann 可积当且仅当其不连续点集为零测集, 这用实分析的语言表述就是 f 几乎处处连续.

证明 Riemann 可积函数必定有界, 因此只需证明其可测. 对于可积函数, 可取两个阶梯函数列 $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ 满足 $|\varphi_k|, |\psi_k| \leq M$, 并且对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq f \leq \dots \leq \psi_2(x) \leq \psi_1(x) \quad (2.32)$$

以及

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x) dx. \quad (2.33)$$

显然阶梯函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相同, 即 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k$, $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k$, 若令 $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ 分别为两个函数列的极限, 则二者均为可测函数, 且 $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$, 由有界收敛定理可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}(x) dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\psi}(x) dx \quad (2.34)$$

但其极限相同, 因此

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} (\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x)) dx = 0, \quad (2.35)$$

而 $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} \geq 0$, 故 $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} = 0, a.e.$, 因此 $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = f, a.e.$, 这说明 f 可测, 由于 $\varphi_k \rightarrow f, a.e.$, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x) dx, \quad (2.36)$$

故 f 的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相同.

Step 3. 非负函数

下面讨论非负函数的 Lebesgue 积分, 这里只要求函数非负可测, 并不要求其有界 (甚至可以取到 $+\infty$).

定义 2.4 (Lebesgue 积分)

对于非负可测函数 f , 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int f(x) dx = \sup_g \int g(x) dx, \quad (2.37)$$

其中 g 为可测函数, 满足 $0 \leq g \leq f$, 并且支撑在有限测度集中.



根据上面的定义, 上确界可能为有限, 也可能为无穷, 若有限, 则称函数 **Lebesgue 可积** (或简单可积). 对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, $f \geq 0, \chi_E \geq 0$, 因此可定义

$$\int_E f(x) dx = \int f(x) \chi_E(x) dx. \quad (2.38)$$

同样地, 下面考虑积分的一些性质.

命题 2.3

设 f, g 为非负可测函数, 则其积分具有如下性质:

1. 线性性: 若 $a, b \in \mathbb{R}_+$ 则

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g. \quad (2.39)$$

2. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f. \quad (2.40)$$

3. 单调性: 若 $f \leq g$, 则

$$\int f \leq \int g. \quad (2.41)$$

4. 若 g 可积且 $0 \leq f \leq g$, 则 f 也可积.

5. 若 f 可积, 则 $f(x) < \infty, a.e.$.

6. 若 $\int f = 0$, 则 $f(x) = 0, a.e.$.



证明

- 不妨设 $a = b = 1$, 设 $\varphi \leq f, \psi \leq g$ 为满足定义的函数, 则放缩后取上确界得到 $\int f + \int g \leq \int (f + g)$; 反过来设 $\eta \leq f + g$, 并定义 $\eta_1(x) = \min(f(x), \eta(x)) \leq f(x)$, $\eta_2 = \eta - \eta_1 = f + g - \eta \leq g$, 则

$$\int \eta = \int (\eta_1 + \eta_2) = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leq \int f + \int g, \quad (2.42)$$

对 η 取上确界得证.

- 注意到 $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$ 易证.
- 任何满足定义的 φ 都有 $0 \leq \varphi \leq f \leq g$, 因此 g 对应的上确界更大.

4. g 可积说明 $\int g < \infty$, 故

$$\sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq g} \int \varphi = \int g < \infty, \quad (2.43)$$

因此由确界原理得证.

5. 设 $E_k = \{f \geq k\}$, $E_\infty = \{f = \infty\}$, 则

$$\int f \geq \int f \chi_{E_k} \geq km(E_k), \quad m(E_k) \leq \frac{C}{k} \quad (2.44)$$

由于 $E_k \searrow E_\infty$, 因此 $m(E_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$, 得证.

6. 取一列递增简单函数逼近 f , 根据积分放缩可知每个简单函数都几乎处处为 0, 因此 f 也几乎处处为 0.

下面考虑一些非负可测函数的收敛定理, 其动机依旧来自算子换序问题. 但是不同于有界收敛定理, 这时并没有非常好的结果, 例如考虑

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.45)$$

则 $f_n \rightarrow 0$, 但是

$$0 \leq 1 = \int f_n, \quad (2.46)$$

即极限函数的积分小于积分的极限, 更严格地见如下定理.

定理 2.3 (Fatou)

设 $\{f_n\}$ 为正项可测函数列, 并且 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.47)$$

证明 若 $\int f = \infty$, 则右式也为 ∞ , 因此仅考虑 f 可积的情形. 设 $0 \leq g \leq f$, 其中 g 有界且支撑在有限测度集 E 上, 设 $g_n(x) = \min\{g(x), f_n(x)\}$, 则 g_n 可测且支撑在 E 上, 并且 $g_n(x) \rightarrow g(x), a.e.$, 根据有界收敛定理有

$$\int g_n \rightarrow \int g, \quad (2.48)$$

根据 g_n 的构造有 $g_n \leq f_n$, 因此 $\int g_n \leq \int f_n$, 两边取下极限有

$$\int g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \quad (2.49)$$

左边再对 g 取上确界 (根据非负可测函数 Lebesgue 积分的定义), 得证.

尽管如此, 对于一些特殊的情形, 积分与极限仍然可以交换.

推论 2.2

设 f 为非负可测函数, $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 且 $f_n(x) \leq f(x)$, $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f. \quad (2.50)$$

证明 由于 $f_n \leq f$, 因此 $\int f_n \leq \int f$, 故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f, \quad (2.51)$$

根据 Fatou 引理即证.

下面的记号 $f_n \nearrow f$ 表示 f_n 几乎处处单增收敛到 f .

推论 2.3 (单调收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 且 $f_n \nearrow f$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f. \quad (2.52)$$

根据单调收敛定理, 可以给出如下推论, 其一是 Fatou 引理的推广, 其二是函数项级数的结论.

推论 2.4 (Fatou)

设 $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 则

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.53)$$

证明 设 $g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$, 则 g_n 非负可测且对任意 $i \geq n$ 有

$$g_n \leq f_i \Rightarrow \int g_n \leq \int f_i \Rightarrow \int g_n \leq \inf_{i \geq n} \int f_i, \quad (2.54)$$

而 $g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, 因此由单调收敛定理可得

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.55)$$

推论 2.5

考虑函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, 其中 $a_k(x)$ 非负可测, 则

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x) dx. \quad (2.56)$$

证明 令 f_n 为级数的部分和, 易知.

上面的推论实际上表明, 若 $\sum \int a_k(x) < \infty$, 则 $\sum a_k(x)$ 可积, 即几乎处处有限. 借助这种观察, 可以给出 Cantor-Cantelli 引理的证明.

引理 2.2 (Cantor-Cantelli)

设 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 为一组可测集, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$, 则 $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ 为零测集.

将上极限集表示为集合的交并形式, 可以直接证明上述结论, 为了使用前述推论, 令 $a_k(x) = \chi_{E_k}(x)$, 则 $x \in E$ (即有无限个 E_k 包含 x) 当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \infty$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x) dx < \infty, \quad (2.57)$$

因此 $\sum a_k(x)$ 几乎处处有界, 故 E 为零测集.

下面讨论一个具体的函数, 为后面的章节铺垫.

例 2.1 定义 $\mathbb{R}^d$ 中的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x|^{d+1}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.58)$$

下证对任意 $\varepsilon > 0$, f 在 $|x| \geq \varepsilon$ 可积.

固定 $\varepsilon > 0$, 令 $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^k \varepsilon < |x| \leq 2^{k+1} \varepsilon\}$ 并定义

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \quad a_k(x) = \frac{1}{(2^k \varepsilon)^{d+1}} \chi_{A_k}(x), \quad (2.59)$$

则 $f(x) \leq g(x)$, $\int f \leq \int g$, 由于每个 A_k 都是 $A = \{1 < |x| \leq 2\}$ 的拉伸, 因此根据 Lebesgue 测度的性质可得 $m(A_k) = (2^k \varepsilon)^d m(A)$, 因此

$$\int g = \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(A_k)}{(2^k \varepsilon)^{d+1}} = m(A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon}, \quad (2.60)$$

得证.

Step 4. 一般可积函数

下面考虑更一般的情形, 称实值函数 f Lebesgue 可积, 若 $|f|$ Lebesgue 可积 (这在上一部分定义过). 而其积分可以通过分解来定义, 记

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}, \quad (2.61)$$

则 $f^+, f^- \geq 0$ 且 $f = f^+ - f^-$, 因此可定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f = \int f^+ - \int f^-. \quad (2.62)$$

这里依旧存在良定性, 若存在两个非负可积函数满足 $f = f_1 - f_2$, 是否仍然有

$$\int f = \int f_1 - \int f_2, \quad (2.63)$$

设 $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ 为两种表示, 则 $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, 各项都是非负可积函数, 因此积分可得

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2, \quad (2.64)$$

移项得证.

根据定义可知, 如果仅改变 f 在一个零测集上的取值, 那么 f 的可积性与积分值都不会受到影响, 这也说明可以考虑“几乎处处有限”, 即仅在一个零测集取无穷值的函数, 并且两个可积函数可以随意相加 (因为其无穷值仍然在一个零测集中). 此外, 在积分理论中, “几乎处处”实际上给出了函数之间的一个等价关系, 在这种观点下称 $f = g$, 实际上是说 $f = g, a.e.$.

与前面类似, 容易验证:

命题 2.4

Lebesgue 积分满足线性、可加性、单调性以及三角不等式.

为了证明后面的定理, 考虑如下引理.

引理 2.3

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$:

1. 存在有限测度集 B 使得

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon. \quad (2.65)$$

2. 绝对连续性: 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $m(E) < \delta$ 都有

$$\int_E |f| < \varepsilon. \quad (2.66)$$

证明

1. 不妨设 $f \geq 0$. 定义 $B_N = B_N(0)$, $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$, 则

$$f_N \geq 0, \quad f_N \nearrow f, \quad (2.67)$$

根据单调收敛定理有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N = \int f, \quad (2.68)$$

因此当 N 充分大时有

$$0 \leq \int f - \int f\chi_{B_N} = \int f\chi_{B_N^c} = \int_{B_N^c} f < \varepsilon, \quad (2.69)$$

得证.

2. 对于第二部分, 令

$$E_N = \{x : f(x) \leq N\}, \quad f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}, \quad (2.70)$$

则 f_N 非负、单调且收敛到 f ，因此对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N > 0$ 使得

$$\int (f - f_N) < \varepsilon/2, \quad (2.71)$$

取 $0 < \delta < \varepsilon/2N$ ，则对任意 $m(E) < \delta$ 有

$$\int_E f = \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \quad (2.72)$$

$$\leq \int (f - f_N) + \int_E f_N \quad (2.73)$$

$$\leq \int (f - f_N) + Nm(E) \quad (2.74)$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad (2.75)$$

下面证明 Lebesgue 积分的基石定理之一：控制收敛定理 (dominant convergence theorem)，它解释了积分与极限的换序关系。

定理 2.4 (控制收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为一列可测函数，几乎处处收敛到 f ，那么若存在可积函数 g 使得 $|f_n(x)| \leq g(x)$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| = 0, \quad \int f_n \rightarrow \int f. \quad (2.76)$$

证明 对任意 $N \geq 0$ ，设

$$E_N = \{x : |x| \leq N, g(x) \leq N\}, \quad (2.77)$$

则根据上一条引理，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N 使得

$$\int_{E_N^c} g < \varepsilon, \quad (2.78)$$

因此 $f_n \chi_{E_N}$ 的上界被 N 控制，且支撑在一个有限测度集上，根据有界收敛定理可知对充分大的 n 有

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon, \quad (2.79)$$

因此直接估计可得

$$\int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \quad (2.80)$$

$$\leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2 \int_{E_N^c} g \quad (2.81)$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon, \quad (2.82)$$

得证。

复值函数

$\mathbb{R}^d$ 上的实变复值函数可以表示为

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad (2.83)$$

其中 u, v 均为实值函数，称为 f 的实部与虚部，延续前面的讨论，称 f Lebesgue 可积，若函数

$$|f(x)| = \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2} \quad (2.84)$$

Lebesgue 可积。由于

$$|u(x)|, |v(x)| \leq |f(x)|, \quad |f(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|, \quad (2.85)$$

因此 f 可积当且仅当 u, v 可积。进一步， f 的 Lebesgue 积分可定义为

$$\int f = \int u + i \int v, \quad \int_E f = \int f \chi_E. \quad (2.86)$$

容易验证, 可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的所有复值可积函数构成了一个 $\mathbb{C}$ -向量空间 (由于 $|f+g| \leq |f|+|g|$, 故 f, g 可积可推出 $f+g$ 可积)。

2.2 可积函数空间 L^1

根据定义, 所有 Lebesgue 可积函数可以构成一个向量空间, 并且可以在其中定义范数/距离, 进一步可以验证该空间在适当范数下完备. 首先定义这一范数.

定义 2.5 (L^1 范数)

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数, 定义其 L^1 范数为

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx. \quad (2.87)$$

注 本节讨论的范数基本都是 L^1 范数, 因此一般省略 L^1 下标.

很容易验证其满足范数的如下性质:

命题 2.5

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

1. $\|af\| = |a| \|f\|, \forall a \in \mathbb{C}.$
2. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$
3. $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0, a.e..$

其中第 3 条需要做一些说明, 很容易找到一个不恒为 0 的可测函数, 其积分为 0, 因此 $\|f\| = 0$ 并不能保证 $f = 0$, 解决这一问题的方法是代数中常见的“商运算”, 即将函数空间模去几乎处处相等的等价关系, 这就很熟悉了.

范数可以诱导距离, 定义为

$$d(f, g) = \|f - g\|, \quad (2.88)$$

很容易验证其满足距离的性质:

命题 2.6

设 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

1. $d(f, g) = d(g, f).$
2. $d(f, g) = 0$ 当且仅当 $f = g, a.e..$
3. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$

下面讨论一个重要的问题: L^1 空间的完备性.

定义 2.6 (Cauchy 列 & 完备性)

设 (V, d) 为度量空间, 称 $\{x_k\} \subset V$ 为 Cauchy 列, 若

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} d(x_k, x_l) = 0. \quad (2.89)$$

称度量空间 (V, d) 完备, 若其中任何 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都存在 $x \in V$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0. \quad (2.90)$$

引理 2.4

设 $\{f_k\}$ 为度量空间 (V, d) 中的 Cauchy 列, 若其存在子列 $\{f_{n_k}\}$ (依度量) 收敛到 f , 则 f_k (依度量) 收敛到 f .



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 使得对任意 $n_k > N_1$ 有 $\|f_{n_k} - f\| < \varepsilon/2$, 也存在 N_2 使得对任意 $k > N_2$ 有 $\|f_{n_k} - f_k\| < \varepsilon/2$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $k > N$ 有

$$\|f_k - f\| \leq \|f_k - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon, \quad (2.91)$$

得证.

定理 2.5 (Riesz-Fischer)

L^1 空间在前述度量下是完备的.



证明 设 $\{f_n\}$ 为 L^1 空间中的 Cauchy 列, 考虑子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得对任意 $k \geq 1$ 有

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad (2.92)$$

该子列存在是因为根据定义, 对任意 $m, n \geq N(\varepsilon)$ 就有

$$\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon, \quad (2.93)$$

取 $n_k = N(2^{-k})$ 即可.

定义函数

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \quad (2.94)$$

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad (2.95)$$

由于 g 是一个函数列的单调极限, 根据单调收敛定理可知

$$\int g = \int |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \int |f_{n_1}| + 1 < \infty, \quad (2.96)$$

即 $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 而显然 $|f(x)| \leq g(x)$, 根据控制收敛定理可知 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$, 根据引理可知 $\|f_n, f\| \rightarrow 0$, 得证.

根据上面的过程可得推论

推论 2.6

设 $\{f_n\}$ 为 L^1 中的 Cauchy 列, 其依度量极限为 f , 则存在子列 f_{n_k} 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.



有理数在实数中是稠密的, 类似在 L^1 中也可以考虑稠密性.

定义 2.7 (稠密性)

称一族函数 $\mathcal{G}$ 在 L^1 稠密, 若对任意 $f \in L^1, \varepsilon > 0$, 存在 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $\|f - g\| < \varepsilon$.



幸运的是, 过去见到许多用以逼近可测函数的函数族都是稠密的.

定理 2.6

如下函数族都在 L^1 中稠密:

1. 简单函数.
2. 阶梯函数.
3. 有紧支集的连续函数.



证明

1. 不妨设 $f \geq 0$, 则存在递增简单函数列 $\varphi_k \rightarrow f$, 根据控制收敛定理可知

$$\|f - \varphi_k\| = \int |f - \varphi_k| \rightarrow 0. \quad (2.97)$$

2. 由 1 知存在简单函数 φ 使得 $\|f - \varphi\| < \varepsilon$, 只需证明阶梯函数对简单函数稠密即可, 若不妨设 $\varphi = \chi_E$, 则根据定理 1.5 第 4 条可知存在一族几乎不相交的矩形 $\{R_j : 1 \leq j \leq n\}$ 使得 $m(E \triangle \bigcup_{j=1}^n R_j) \leq \varepsilon$, 因此令

$$\psi = \sum_{j=1}^n \chi_{R_j}, \quad (2.98)$$

则

$$\|\psi - \chi_E\| = m(E \triangle \bigcup_{j=1}^n R_j) \leq \varepsilon, \quad (2.99)$$

得证.

3. 在 2 的基础上, 只需证明紧支集连续函数对示性函数 χ_R (R 为矩形) 稠密即可, 对于一维情形 ($R = [a, b]$), 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 定义

$$g(x) = \chi_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}, \quad (2.100)$$

并将其延拓为 $[a, b]$ 上的线性函数即可 (使得 g 在 $[a, b]$ 外为 0), 对于高维情形, 将上面的 g 作 product 即可.

事实上, 如果将 $\mathbb{R}^d$ 替换为一个有限测度集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 可以建立空间 $L^1(E)$, 且对 $\mathbb{R}^d$ 中的函数有范数

$$\|f\|_{L^1(E)} = \|f\chi_E\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.101)$$

容易验证前面的诸多性质仍然成立.

更多性质

下面考虑一些可积函数的性质, 对于 $h \in \mathbb{R}^d$, 可以定义:

1. 平移变换: $f_h(x) = f(x - h)$.
2. 拉伸变换: $f(x) \mapsto f(\delta x), \delta > 0$.
3. 反向变换: $f(x) \mapsto f(-x)$.

若 $f = \chi_E$, 则 $f_h = \chi_{E_h}$, 此时显然有 $\|f_h\| = \|f\|$; 若 $f \geq 0$, 则借助单调简单函数列 φ_k 逐点逼近 f 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x - h) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \quad (2.102)$$

进一步易得对任意 f 有上式成立. 类似也容易验证有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x) dx, \quad (2.103)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x) dx. \quad (2.104)$$

根据上面的性质, 可以定义出两个函数的卷积:

定义 2.8 (卷积)

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 函数 $y \mapsto f(x - y)g(y)$ 也可积, 因此可定义 f, g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.105)$$



借助平移可以衡量函数的连续性, 因为 f 在 x 处连续当且仅当 $f_h(x) \rightarrow f(x)$, 根据前文内容可知, 可测函数未必连续, 甚至可能处处不连续, 因此上式对一般可测函数不成立, 但在 L^1 度量下这却是成立的.

命题 2.7

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - f\| = 0. \quad (2.106)$$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g 使得 $\|f - g\| < \varepsilon$, 而

$$f_h - f = (g_h - g) + (f_h - g_h) - (f - g), \quad (2.107)$$

根据 $\|f_h - g_h\| = \|f - g\| < \varepsilon$ 以及 g 的一致连续性, 当 h 充分小时有

$$\|g_h - g\| = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-h) - g(x)| dx < \varepsilon, \quad (2.108)$$

$$\|f_h - f\| \leq \|g_h - g\| + \|f_h - g_h\| + \|f - g\| \quad (2.109)$$

$$\leq 3\varepsilon, \quad (2.110)$$

得证.

2.3 Fubini 定理

若 $d = d_1 + d_2$, 则 $\mathbb{R}^d$ 可以分解为 $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, 若 f 定义在 $\mathbb{R}^d$ 中, 则可以将 f 写作 $f(x, y)$, 其中 $x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 并且可以定义 f 关于 x, y 的切片为

$$f_x(y) = f(x, y), \quad f^y(x) = f(x, y), \quad (2.111)$$

类似地, 对于集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 也可作切片

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}, \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in E\}, \quad (2.112)$$

如下图所示

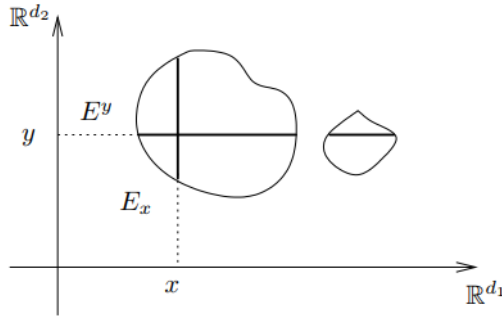


图 2.1: E 的切片

2.3.1 Fubini 定理的证明

定理 2.7 (Fubini)

设 f 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的可积函数, 则对 a.e. 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 有

1. 切片 $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可积.
2. 关于 y 的函数 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 可积.
- 3.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f. \quad (2.113)$$

注 若 f_x, f_y 均可积, 不能得到 f 可积, Sierpinski 给出过一个 $\mathbb{R}^2$ 子集的构造, 该集合不可测, 但与任意直线至多只有两个交点, 考虑其上的示性函数即得反例.

Fubini 定理说明, 可积函数的积分可以交换次序, 即

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy \right) dx, \quad (2.114)$$

这很容易理解, 但并不平凡, 比如对于可测函数 f 或可测集 E , 都不能保证其切片依然可测 (比如 $\mathcal{N} \times \{0\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 零测, 但关于 $y = 0$ 的切片不可测). 记 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的所有满足 Fubini 定理的可积函数, 则 Fubini 定理实际上只需证明 $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$.

出于这一思路, 考虑到简单函数在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性, 因此 Fubini 定理分为如下步骤:

1. 证明 $\mathcal{F}$ 是一个线性空间, 即对线性组合封闭.
2. 证明 $\mathcal{F}$ 对单调极限下封闭.
3. 证明简单函数在 $\mathcal{F}$ 中, 只需证明任何有限测度集上的示性函数在 $\mathcal{F}$ 中.
4. 证明一般可积函数都在 $\mathcal{F}$ 中.

命题 2.8

Step 1. $\mathcal{F}$ 是线性空间.

证明 设 $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$, 则存在零测集 $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 设 $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$, 则 A 零测, 且在 A 外所有 f_k^y 都可积, 因此其线性组合也可积; 对于 $g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx$ 的讨论是类似的.

命题 2.9

Step 2. 设 $\{f_k\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的序列且 $f_k \nearrow f$, 若 f 可积, 则 $f \in \mathcal{F}$.

注 命题对 $f_k \searrow f$ 的情形也成立.

证明 设 $f_k \nearrow f$, 不妨设 $f_k \geq 0$ (否则考虑 $f_k - f_1 \nearrow f - f_1$), 则根据单调收敛定理有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.115)$$

由于 $f_k \in \mathcal{F}$, 则存在零测集 $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 设 $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, 则在 A 外有 $f_k^y \nearrow f^y$, 若令

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \quad (2.116)$$

则根据单调收敛定理有 $g_k \nearrow g$, 再利用单调收敛定理可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy, \quad (2.117)$$

$f_k \in \mathcal{F}$ 说明

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy, \quad (2.118)$$

则根据上面的极限式有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.119)$$

故 Fubini-3 成立, f 可积说明 g 几乎处处有限, 因此 f^y 几乎处处可积, 因此 $f \in \mathcal{F}$, 得证.

命题 2.10

Step 3. 若 E 为有限测度集, 则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

证明 由简到繁依次证明:

1. 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为立方体, 则 $E = Q_1 \times Q_2$, 其中 Q_i 为 $\mathbb{R}^{d_i}$ 中的立方体, 这时 $\chi_E^y(x)$ 可积, 并且

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx = |Q_1| \chi_{Q_2}, \quad (2.120)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy = |Q_1| |Q_2| = |E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E, \quad (2.121)$$

g 的可积性与后式的成立是显然的, 故 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

- 若 E 为闭立方体 Q 边界的子集, 则显然 E 零测, 且当 $y \in Q_2^\circ$ 时 $f^y = 0$, 因此 $f^y = 0, a.e.$, 故可积, 同理 $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx = m(E^y)$ 也几乎处处为 0, 自然也可积, 第三条成立是因为两边积分均为 0, 故 $\chi_E \in \mathcal{F}$.
- 若 $E = \bigcup_{k=1}^K Q_k$, 其中 Q_k 为几乎不相交的立方体, 则 $Q_k = Q_k^\circ \sqcup A_k$, 这里 A_k 为 Q_k 边界, 则将其重组可知

$$\chi_E = \sum_{k=1}^K \chi_{Q_k^\circ} + \chi_{\bigcup_{k=1}^K A_k} \in \mathcal{F}. \quad (2.122)$$

- 若 E 为有限测度开集, 则可设 $E = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$, 其中 Q_k 为几乎不相交的立方体, 设其前 n 项并为 E_n , 则 $\chi_{E_n} \in \mathcal{F}$ 且 $\chi_{E_n} \nearrow \chi_E \in \mathcal{F}$.
- 若 E 为 G_δ 集, 则 $E = \bigcap_{k=1}^\infty O_k$, 其中 O_k 为开集 (不妨设其测度有限), 记其前 k 项交为 F_k , 则 $\chi_{F_k} \in \mathcal{F}$ 且 $\chi_{F_k} \searrow \chi_E \in \mathcal{F}$.
- 若 E 为零测集, 则存在 G_δ 集 G 使得 $E \subset G, m(G) = 0$, 由于 $\chi_G \in \mathcal{F}$, 因此

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G = 0, \quad (2.123)$$

这说明 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x, y) dx$ 几乎处处为 0, 也即 G^y “几乎个个” 零测, 而 $E^y \subset G^y$ 说明 E^y “几乎个个” 零测, 故 $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx$ 几乎处处为 0 (自然是可积的), 即得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx \right) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E, \quad (2.124)$$

故 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

- 若 E 为一般的可测集, 则存在 G_δ 集 G 使得 $E \subset G, m(G - E) = 0$, 因此

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G-E} \in \mathcal{F}. \quad (2.125)$$

命题 2.11

Step 4. 若 f 可积, 则 $f \in \mathcal{F}$.

证明 分解 $f = f^+ - f^-$, 其中 f^+, f^- 都是非负可积的, 因此不妨设 $f \geq 0$, 取简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 单调逼近 f , 则每个 φ_k 都是有限测度集上示性函数的线性组合, 故 $\varphi_k \in \mathcal{F}$, 取极限可知 $f \in \mathcal{F}$, 得证.

2.3.2 Fubini 定理的应用

定理 2.8 (Tonelli)

设 $f(x, y)$ 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的非负可测函数, 则对 $a.e.$ 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 有

- 切片 f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 可测.
- 关于 y 的函数 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 可测.
-

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f. \quad (2.126)$$

上述定理常与 Fubini 定理同时使用: 首先对可测函数 $|f|$ 使用 Tonelli 定理, 若其有限则说明 f 可积, 再利用 Fubini 定理进行计算.

证明 考虑截断函数

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & |(x, y)| < k, f(x, y) < k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.127)$$

则 f_k 可积且 $f_k \nearrow f$, 由单调收敛定理立得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx, \quad (2.128)$$

根据 Fubini 定理, 存在零测集 A_k 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 则在零测集 A 外 $f_k^y \nearrow f^y$, 因此 f^y 可测, 若令

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \quad (2.129)$$

则 $g_k \nearrow g$, g 可测, 再次使用单调收敛定理有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy, \quad (2.130)$$

而由 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy, \quad (2.131)$$

取极限得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.132)$$

对于可测集 E , 若取 $f = \chi_E$, 则利用 Tonelli 定理可得如下推论

推论 2.7

设 E 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集, 则对 a.e. 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 切片

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\} \quad (2.133)$$

在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可测, 并且 $m(E^y)$ 是一个关于 y 的可测函数, 满足

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y) dy. \quad (2.134)$$

命题 2.12

设 $E = E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集, 且 $m_*(E_2) > 0$, 则 E_1 可测.

证明 根据 Fubini 定理, 存在零测集 $A \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 在 A^c 中 E^y 可测, 而

$$0 < m_*(E_2) \leq m_*(E_2 \cap A) + m_*(E_2 \cap A^c) = m_*(E_2 \cap A^c), \quad (2.135)$$

故 $E_2 \cap A^c$ 不为空, 因此取 $y \in E_2 \cap A^c$ 可知 $\chi_{E^y}(x) = \chi_E(x, y) = \chi_{E_1}(x)$, 故 $E_1 = E^y$ 可测.

为了得到反过来的结论, 首先考虑如下引理

引理 2.5

设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 则

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2). \quad (2.136)$$

注 下面的证明中仅考虑二者外测度有限的情形, 由此出发也容易证明当 E_1 零测时 $E_1 \times E_2$ 零测 (即使 $m_*(E_2) = \infty$).

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 取矩形列 Q_k, Q'_k 使得

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q'_k, \quad (2.137)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq m_*(E_1) + \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q'_k| \leq m_*(E_2) + \varepsilon, \quad (2.138)$$

此时 $E \subset \bigcup_{k,l}^{\infty} Q_k \times Q'_l$, 因此

$$m_*(E) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |Q_k \times Q'_l| \quad (2.139)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l| \right) \quad (2.140)$$

$$\leq (m_*(E_1) + \varepsilon)(m_*(E_2) + \varepsilon), \quad (2.141)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得证.

命题 2.13

设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 可测, 则 $E = E_1 \times E_2$ 可测, 并且

$$m(E) = m(E_1) \times m(E_2). \quad (2.142)$$

证明 只需证明 E 可测, 则根据 Fubini 定理可以得到乘积关系. 取 G_δ 集 $F_1 \supset E_1, F_2 \supset E_2$ 使得 $F_1 - E_1, F_2 - E_2$ 零测, 断言 $F_1 \times F_2$ 也为 G_δ 集 (表示为开集交, 合并即得), 则

$$m_*(F_1 \times F_2 - E_1 \times E_2) \leq m_*(F_1 - E_1)m_*(F_2 - E_2) = 0, \quad (2.143)$$

故 $E_1 \times E_2 = E$ 可测.

推论 2.8

设 f 为 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中的可测函数, 则 $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中可测.

证明 注意到 $\{\tilde{f} > a\} = \{f > a\} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 即得.

推论 2.9

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 中的非负函数, 定义

$$A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\} = \{y \geq 0\} \cap \{y \leq f(x)\}, \quad (2.144)$$

则 f 可测当且仅当 A 可测, 该条件满足时有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = m(A). \quad (2.145)$$

证明 设函数 $F(x, y) = y - f(x)$, 若 f 可测则 F 可测, 因此

$$\{F \leq 0\} = \{y \leq f(x)\} \quad (2.146)$$

为可测集, $A = \{y \geq 0\} \cap \{y \leq f(x)\}$ 可测. 反之设 A 可测, 则 A^y 几乎个个可测, 因此对任意 $a \geq 0$, 取 $a_n \nearrow a$, 使得 $A^{a_n} = \{f \geq a_n\}$ 可测, 则 $\{f \geq a_n\} \searrow \{f \geq a\}$ 可测, 即 f 可测. 进一步, 由于 $f(x) = m(A_x)$, 根据 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = m(A). \quad (2.147)$$

上面的定理可以得到一个推论: 若 f 可测, 则 $\Gamma = \{F = 0\}$ 为零测集 (同样利用 Fubini 定理).

命题 2.14

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 定义 $\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\} \subset \mathbb{R}^{2d}$, 则 $\tilde{E}$ 可测.

证明 证法 1: 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}, \quad (2.148)$$

设

$$\tilde{E}' = \{(x', y') \in \mathbb{R}^{2d} : (x', y')^T = A(x, y)^T, (x, y) \in \tilde{E}\} = \{(x - y, y) : (x, y) \in \tilde{E}\}, \quad (2.149)$$

由于 $\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\}$, 因此

$$\tilde{E}' = \{(x', y') : x' \in E\} = E \times \mathbb{R}^d, \quad (2.150)$$

因此 $\tilde{E}'$ 可测, 故 $\tilde{E}$ 可测.

证明 证法 2 (Stein): 断言若 E 为开集, 则 $\tilde{E}$ 为开集, 显然可测; 若 E 为 G_δ 集, 则 $\tilde{E}$ 也为 G_δ 集. 若 E 为零测集, 则取 G_δ 集 $G \supset E$, 易知 $\tilde{G} \supset \tilde{E}$ 且 $\tilde{G}$ 可测, 取紧集 $B_k = \{|y| < k\}$, 利用 Tonelli 定理可得

$$m(\tilde{G} \cap B_k) = \int_{B_k} \chi_{\tilde{G}} \quad (2.151)$$

$$= \int_{B_k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_G^y(x) dx \right) dy \quad (2.152)$$

$$= \int_{B_k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_G(x - y) dx \right) dy \quad (2.153)$$

$$= m(G)m(B_k) \quad (2.154)$$

$$= 0 \quad (2.155)$$

由于 $\tilde{G} \cap B_k \nearrow \tilde{G}$, 故 $\tilde{G}$ 零测, 即得 $\tilde{E}$ 零测.

综上, 一般可测集 E 可分解为 G_δ 集与零测集的并, 故命题成立.

推论 2.10

若 $f(x)$ 可测, 则函数 $\tilde{f}(x, y) = f(x - y)$ 可测.



证明 f 可测说明 $E_a = \{f > a\}$ 可测, 则根据上述命题有

$$\{\tilde{f} > a\} = \{(x, y) : x - y \in E_a\} \quad (2.156)$$

可测, 得证.

2.4 Fourier 变换的简单讨论

对于函数 f , 可以定义其 Fourier 变换与逆变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (2.157)$$

如今借助 Lebesgue 积分理论, 可以很方便地讨论其基本性质.

命题 2.15

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中连续有界.



证明 放缩可得 $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, 故 $\hat{f}$ 有界, 由于

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} = f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}, \quad |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x)|, \quad (2.158)$$

根据控制收敛定理可得

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0} dx = \hat{f}(\xi_0), \quad (2.159)$$

故 $\hat{f}$ 连续.

尽管 $\hat{f}$ 有许多良好的性质, 但它未必处于 L^1 空间中, 为了讨论 Fourier 逆变换公式, 可以给出如下定理:

定理 2.9

若 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 Fourier 逆变换公式几乎处处成立.

**推论 2.11**

若 $\hat{f}(\xi) \equiv 0$, 则 $f = 0, a.e..$



为了证明上述定理, 首先给出一个引理.

引理 2.6 (乘积公式)

若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx. \quad (2.160)$$



证明 设 $F(\xi, y) = g(\xi)f(y)e^{-2\pi i y \cdot \xi}$, 则 $F(\xi, y) \in L^1$, 首先根据 Tonelli 定理有

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |F| = \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)|d\xi \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy = \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1} < \infty, \quad (2.161)$$

故 $F \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$, 因此再根据 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(\xi, y)dy \right) d\xi \quad (2.162)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(\xi, y)d\xi \right) dy \quad (2.163)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx. \quad (2.164)$$

下面证明反演公式, 考虑函数 $K_\delta(x) = \delta^{-d/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}$, $\delta > 0$, 则简单计算可得

$$\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}, \quad \widehat{\widehat{K}_\delta}(x) = K_\delta(x) \quad (2.165)$$

这里的 K_δ 是一个“好核”, 即其满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)dy = 1, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{|y|>\eta} K_\delta(y)dy = 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.166)$$

并且根据 Fourier 变换的平移性质可知

$$g(\xi) = e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{K}_\delta(\xi) \longmapsto K_\delta(x - y), \quad (2.167)$$

因此根据乘积公式有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_\delta(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi, \quad (2.168)$$

若 $\hat{f} \in L^1$, 则借助控制收敛定理, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时右式收敛于

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi, \quad (2.169)$$

接着考虑左式, 设差值

$$\Delta_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_\delta(x - y)dy - f(x) \quad (2.170)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x - y) - f(x))K_\delta(y)dy, \quad (2.171)$$

$$|\Delta_\delta(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)|K_\delta(y)dy, \quad (2.172)$$

对 x 积分, 并使用 Tonelli 定理可得

$$\|\Delta_\delta\| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f_y - f\|K_\delta(y)dy, \quad (2.173)$$

其中 $f_y(x) = f(x - y)$, 根据平移函数在 L^1 中的连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$ 使得对任意 $|y| < \eta$ 都有 $\|f_y - f\| < \varepsilon$, 则

$$\|\Delta_\delta\| \leq \varepsilon + \int_{|y|>\eta} \|f_y - f\| K_\delta(y) \quad (2.174)$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\| \int_{|y|>\eta} K_\delta(y), \quad (2.175)$$

由于 $\|f\| < \infty$, 因此合理选择 δ 可使得第二项小于 ε , 即得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\Delta_\delta\| = 0, \quad (2.176)$$

根据 Riesz-Fischer 定理, Δ_δ 存在子列 Δ_{δ_n} 几乎处处收敛到 0, 也就是说几乎处处 x 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) K_{\delta_n}(x - y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{-\pi \delta_n |\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (2.177)$$

得证.

第3章 微分与积分

3.1 积分的微分

考虑 $[a, b]$ 上的可积数 f , 令

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

一个自然的问题是是否有 $F'(x) = f(x)$, 根据导数的定义可得

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy, \quad (3.2)$$

这里 $I = (x, x+h)$, 上面的积分实际上表示 f 在 I 中的平均值, 我们期望在区间充分小时有

$$\lim_{|I| \rightarrow 0, x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy = f(x). \quad (3.3)$$

这种表示可以轻松推广到高维, 只需将 I 替换为球 B , 即

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0, x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x)?, \quad (3.4)$$

上述问题称为**平均问题**, 其中 $m(B) = v_d r^d$, r 为球半径, v_d 为单位球体积测度. 如果 f 在 x 处连续, 那么可以得到非常好的结果: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|x - y| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 因此

$$\left| f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \right| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

此时上面的猜测显然成立, 事实上, 对于一般的情形亦然, 下面来讨论这一问题.

3.1.1 Hardy-Littlewood 极大函数

定义 3.1 (极大函数)

若 f 可积, 则定义其极大函数为

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy, \quad (3.6)$$

其中 B 为包含 x 的球.



下面考虑一些极大函数的性质:

定理 3.1

设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则

1. f^* 可测.
2. f^* 几乎处处有限.
3. 对任意 $\alpha > 0, A = 3^d$, f^* 满足

$$m(\{f^* > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}. \quad (3.7)$$



上面第 3 条中的不等式被称为“弱形式” (weak-type), 因为它弱于 L^1 空间中的 Chebychev 不等式, 即

$$m(\{|g| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^1}. \quad (3.8)$$

不过弱形式中的常数 A 通常无关紧要, 因为它只与维数有关.

证明 1. 设 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$, 若 $x \in E_\alpha$, 则存在某个包含 x 的开球 B 使得

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy > \alpha, \quad (3.9)$$

因此对任何 $x' \in B$ 都有

$$f^*(x') \geq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \alpha, \quad (3.10)$$

即 $x' \in E_\alpha$, E_α 为开集, f^* 可测.

2. 根据 3, 令 $\alpha \rightarrow \infty$ 可知 $m(\{f = \infty\}) = 0$.

上面第三条的证明需要用到一个初等版本的 Vitali 覆盖定理, 考虑如下引理

引理 3.1

设 $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有限开球族, 则其中存在不相交的球 $B_{i_1}, \dots, B_{i_j}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) = \sum_{j=1}^k m(3B_{i_j}). \quad (3.11)$$



定理的证明基于这样的观察: 设 B, B' 为两个相交球, 若 $r_B > r_{B'}$, 则 B' 可以被与 B 同心, 半径为 $3r_B$ 的球覆盖.

证明 首先取半径最大的球 B_{i_1} , 设其半径放大 3 倍的同心球为 $\tilde{B}_{i_1}$, 删去所有与 B_{i_1} 相交的球, 因为它们都被包含在 $\tilde{B}_{i_1}$ 中. 重复这一操作, 则可以得到无交球列 $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$, 且它们放大后的球覆盖 $\mathcal{B}$, 因此

$$\bigcup_{l=1}^n B_l \subset \bigcup_{j=1}^k \tilde{B}_{i_j} \implies m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq \sum_{j=1}^k m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \quad (3.12)$$

下面证明前述定理中的弱 1-1 型不等式.

证明 [弱 1-1 型不等式] 设 $E_\alpha = \{f^* > \alpha\}$, 则对任意 $x \in E_\alpha$, 存在包含 x 的球 B_x 满足

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha, \quad m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy. \quad (3.13)$$

取定紧集 $K \subset E_\alpha$, 由于 $K \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$, 因此存在有限子覆盖 $K \subset \bigcup_{l=1}^n B_l$, 根据前面的引理, 可以取不相交的 $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}), \quad (3.14)$$

因此

$$m(K) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^k \int_{B_{i_j}} |f| = \frac{A}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}} |f| \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}, \quad (3.15)$$

根据 K 的任意性, 得证.

3.1.2 Lebesgue 微分定理

定理 3.2 (Lebesgue 微分定理)

若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则

$$f(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy, \quad a.e. \quad (3.16)$$



证明 只需证明, 对任意 $\alpha > 0$, 下面的集合零测:

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}, \quad (3.17)$$

固定 α , 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g 满足

$$\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon, \quad (3.18)$$

注意到

$$\left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y)| + \frac{1}{m(B)} \left| \int_B g(y) dy - g(x) \right| \quad (3.19)$$

$$+ |g(x) - f(x)|, \quad (3.20)$$

两边取上极限可得

$$\limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0, \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq (f - g)^*(x) + |f(x) - g(x)|, \quad (3.21)$$

若令

$$A_\alpha = \{x : (f - g)^*(x) > \alpha\}, \quad B_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}, \quad (3.22)$$

则容易发现 $E_\alpha \subset A_\alpha \cup B_\alpha$, 借助 Chebychev 不等式以及弱 1-1 型不等式可得

$$m(E_\alpha) \leq m(A_\alpha) + m(B_\alpha) \quad (3.23)$$

$$\leq \frac{A+1}{\alpha} \|f - g\|_{L^1} \quad (3.24)$$

$$\leq \frac{A+1}{\alpha} \varepsilon, \quad (3.25)$$

根据 ε 任意性可知 $m(E_\alpha) = 0$, 得证.

前文的许多讨论都以“可积”为出发点, 而函数的可积性是一个全全局概念, 而微分只需要考虑点 x 邻域内包含 x 的球即可, 因此可以定义**局部可积**的概念.

定义 3.2 (局部可积)

称 f 在 $\mathbb{R}^d$ 局部可积, 若对任意球 $B \subset \mathbb{R}^d$ 有 $f(x)\chi_B(x)$ 可积, 记为 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

由此可以得到加强版本的 Lebesgue 微分定理.

定理 3.3 (Lebesgue 微分定理)

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则

$$f(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy, \quad a.e. \quad (3.26)$$

微分定理的首个应用是定义 **Lebesgue 密度**.

定义 3.3 (Lebesgue 密度)

若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为可测集, $x \in \mathbb{R}^d$, 若

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1, \quad (3.27)$$

则称 x 在 E 中有 Lebesgue 密度.

换句话说, x 满足上述条件当且仅当对任意 $\varepsilon < 1$, 存在包含 x 的球 B 使得 E 覆盖 B 中占比 α 的部分, 即

$$m(B \cap E) \geq \alpha m(B), \quad (3.28)$$

这也可以理解为, x 邻域中的球几乎完全被 E 覆盖. 对示性函数 χ_E 使用微分定理, 可以给出如下结论

推论 3.1

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 则

1. 几乎所有 $x \in E$ 在 E 中有 Lebesgue 密度.
2. 几乎所有 $x \notin E$ 在 E 中没有 Lebesgue 密度.

证明 显然 $\chi_E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 因此

$$\chi_E(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B \chi_E(y) dy = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)}, \quad a.e. \quad (3.29)$$

定义 3.4 (Lebesgue 集)

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则定义 f 的 Lebesgue 集包含所有 $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $f(\bar{x})$ 有限且

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy = 0. \quad (3.30)$$

借助 Lebesgue 集可以刻画局部可积函数的连续性, 注意到 f 的所有连续点都包含在其 Lebesgue 集中, 并且当 $\bar{x}$ 在 Lebesgue 集中时有

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(\bar{x}), \quad (3.31)$$

可以给出如下推论

推论 3.2

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\mathbb{R}^d$ 中几乎所有点都包含在 f 的 Lebesgue 集中, 换句话说几乎处处成立

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy = 0. \quad (3.32)$$

证明 对任意 $r \in \mathbb{Q}$, $f - r \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 根据 Lebesgue 微分定理, 存在零测集 E_r 使得对任意 $x \notin E_r$ 有

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r| dy = |f(x) - r|, \quad (3.33)$$

设 $E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E_r$, 则 $m(E) = 0$, 若 $\bar{x} \notin E$ 且 $f(\bar{x})$ 有限, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $|f(\bar{x}) - r| < \varepsilon$, 因此

$$\limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy \leq \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r| dy + |f(\bar{x}) - r| \quad (3.34)$$

$$= 2|f(\bar{x}) - r| \quad (3.35)$$

$$< 2\varepsilon, \quad (3.36)$$

根据 ε 的任意性可知 $\bar{x}$ 在 f 的 Lebesgue 集中, 得证.

前面讨论微分都是通过球中的平均进行逼近, 因此自然会产生问题: 通过其它集族能否得到同样的结果? 对于所有立方体结论同样成立, 对于长方体则不然, 参见教材本章最后一题 (Stein).

定义 3.5 (规律收缩 (shrink regularly))

一族集合 $\{U_\alpha\}$ 称为在 $\bar{x}$ 处规律收缩 (或 bounded eccentricity), 若存在 $c > 0$, 对任意 U_α , 存在包含 $\bar{x}$ 的球 B 使得

$$U_\alpha \subset B, \quad m(U_\alpha) \geq cm(B). \quad (3.37)$$

注 换句话说, 球与规律收缩的集合的测度之比要有一个正的下界.

容易发现立方体是满足这一性质的, 但矩形则不然 (考虑非常“细”的矩形).

推论 3.3

设 $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\{U_\alpha\}$ 在 $\bar{x}$ 处规律收缩, 则

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y) dy = f(\bar{x}) \quad (3.38)$$

对 f 的 Lebesgue 集中的点几乎处处成立.



证明 注意到若 $\bar{x} \in B, U_\alpha \subset B$ 且 $m(U_\alpha) \geq cm(B)$, 则

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(\bar{x})| dy \leq \frac{1}{cm(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy, \quad (3.39)$$

两边取上确界得证.

最后做一些过渡, 考虑球 $B_\delta(0)$ 以及规范化的函数 ($\|\varphi_\delta\|_{L^1} = 1$)

$$\varphi_\delta = \frac{\chi_{B_\delta(0)}}{m(B_\delta(0))}, \quad (3.40)$$

则 $\text{supp } \varphi_\delta = B_\delta(0)$, 对于 $f \in L^1$, 与之做卷积可得

$$f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \varphi_\delta(y) dy \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{m(B_\delta(0))} \int_{B_\delta(0)} f(x-y) dy \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{m(B_\delta(x))} \int_{B_\delta(x)} f(y) dy, \quad (3.43)$$

这种形式已经非常熟悉, Lebesgue 微分定理说明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f * \varphi_\delta = f, a.e. \quad (3.44)$$

也就是说可积函数与 φ_δ 的卷积可以几乎处处逼近 f , 下一节将进一步讨论这一现象.

3.2 好核与恒同逼近

定义 3.6 (好核)

称一族函数 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, 若

1. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$.
2. $\|K_\delta\|_{L^1} \leq A < \infty$.
3. 对任意 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} |K_\delta(x)| dx = 0. \quad (3.45)$$



下面考虑一些好核的例子.

例 3.1 光滑化子 (Mollifier) 设 φ 为一个非负紧支集光滑函数, 满足 $\|\varphi\|_{L^1} = 1$, 定义

$$\varphi_\delta(x) = \delta^{-d} \varphi(x/\delta), \quad (3.46)$$

则对任意 $\eta > 0$, 当 δ 充分小时有 (这是因为紧支集)

$$\int_{|x| > \eta} \varphi_\delta(x) dx = \int_{|y| > \delta^{-1}\eta} \varphi(y) dy = 0, \quad (3.47)$$

此时对任意 $f \in L^1$ 有

$$f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \varphi_\delta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi_\delta(x-y) dy, \quad (3.48)$$

因此 $f * \varphi_\delta$ 是一个光滑函数, 它收敛到 f , 这里的 $\{\varphi_\delta\}$ 称为光滑化子. 这也说明了光滑函数在 L^1 空间中稠密.

例 3.2 热核 (heat kernel) 热核定义为

$$H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad t > 0, \quad (3.49)$$

考虑热方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (3.50)$$

若初值 f 有一些较好的性质, 则热核可以根据 f 给出热方程的解

$$u(x, t) = f * H_t(x) \quad (3.51)$$

例 3.3 上半平面的 Poisson 核 上半平面的 Poisson 核定义为

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.52)$$

这里的参数由 δ 变为 y , 它可以给出上半平面稳态热方程 (Poisson 方程) 的解.

例 3.4 圆盘中的 Poisson 核 圆盘上的 Poisson 核定义为

$$\frac{1}{2\pi} P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}, \quad |x| \leq \pi, \quad (3.53)$$

它可以给出一维稳态热方程的解.

例 3.5 Fejer 核 Fejer 核定义为

$$\frac{1}{2\pi} F_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad (3.54)$$

它可以用来刻画 Fourier 级数的 Cesaro 求和.

好核有许多逼近的性质, 下面来讨论这一内容.

引理 3.2

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, f 连续有界, 则逐点成立 $f * K_\delta \rightarrow f$.



注 事实上, 在有界函数的连续点 x 处也有 $f * K_\delta(x) \rightarrow f(x)$.

证明 根据 f 的连续性, 取定 x , 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 只要 $|y| \leq \eta$ 就有

$$|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon, \quad (3.55)$$

因此

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \quad (3.56)$$

$$\leq \int_{|y| < \eta} |f(x - y) - f(y)| |K_\delta(y)| dy + \int_{|y| \geq \eta} |f(x - y) - f(y)| |K_\delta(y)| dy \quad (3.57)$$

$$\leq A\varepsilon + C \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.58)$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 得证.

引理 3.3

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, $f \in L^1$, 则 $f * K_\delta \xrightarrow{L^1} f$.



证明 根据 Fubini 定理可得

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f * K_\delta(x) - f(x)| dx \quad (3.59)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy dx \quad (3.60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| dx \right) |K_\delta(y)| dy \quad (3.61)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.62)$$

由于 $\lim_{y \rightarrow 0} \|f - f_y\|_{L^1} = 0$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意 $|y| \leq \eta$ 有 $\|f - f_y\|_{L^1} < \varepsilon$, 因此

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1} \leq \int_{|y| < \eta} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy + \int_{|y| > \eta} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy \quad (3.63)$$

$$\leq A\varepsilon + 2\|f\|_{L^1} \int_{|y| > \eta} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.64)$$

因此当 $\delta \rightarrow 0$ 时上述趋于 0.

为了得到更强的逼近, 需要对好核的条件进一步加强, 由此给出**恒同逼近**的定义

定义 3.7 (恒同逼近)

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为一族函数, 若其满足:

1. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$.
2. 对任意 $\delta > 0$ 有 $|K_\delta(x)| \leq A\delta^{-d}$.
3. 对任意 $\delta > 0, x \in \mathbb{R}^d$ 有 $|K_\delta(x)| \leq A\delta/|x|^{d+1}$.



注 容易验证恒同逼近都是好核.

对于一般的可积函数, 借助恒同逼近可以给出几乎处处的逼近.

定理 3.4

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为恒同逼近, $f \in L^1$, 则对任意 f 的 Lebesgue 集的点 x 有

$$f * K_\delta(x) \rightarrow f(x), \quad (3.65)$$

也就是说 $f * K_\delta \xrightarrow{a.e.} f$.



证明思路还是考虑放缩

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy, \quad (3.66)$$

只需证明右边趋于 0, 考虑如下引理

引理 3.4

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, x 在 f 的 Lebesgue 集中, 令

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x-y) - f(x)| dy, \quad r > 0, \quad (3.67)$$

则 $\mathcal{A}$ 连续有界, 且 $\mathcal{A}(r) \rightarrow 0 (r \rightarrow 0)$.



证明 根据 2.3 的绝对连续性可证 $\mathcal{A}$ 的连续性; x 在 f 的 Lebesgue 集中说明 $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(r) = 0$ (注意到 $m(B_r(0)) = v_d r^d$), 即 $\mathcal{A}$ 在 $0 < r \leq 1$ 有界, 而当 $r > 1$ 时

$$\mathcal{A}(r) \leq \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy + \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x)| dy \quad (3.68)$$

$$\leq r^{-d} \|f\|_{L^1} + v_d |f(x)|, \quad (3.69)$$

显然有界.

回到定理的证明, 积分可以分解为两部分

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy = \int_{|y| \leq \delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta < |y| \leq 2^{k+1} \delta}, \quad (3.70)$$

第一部分可以根据恒同逼近的定义 2 直接放缩

$$\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \leq \frac{c}{\delta^d} \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| dy \quad (3.71)$$

$$= c\mathcal{A}(\delta), \quad (3.72)$$

第二部分的每一个求和项可以由恒同逼近的定义 3 放缩

$$\int_{2^k\delta < |y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \leq \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{d+1}} \int_{|y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)| dy \quad (3.73)$$

$$\leq \frac{c'/2^k}{(2^{k+1}\delta)^d} \int_{|y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)| dy \quad (3.74)$$

$$\leq c'2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta), \quad (3.75)$$

综上可得

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq c\mathcal{A}(\delta) + c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \quad (3.76)$$

注意到 $\mathcal{A}$ 有界, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N 使得 $\sum_{k \geq N} 2^{-k} < \varepsilon$, 再令 δ 足够小, 由 $\mathcal{A}$ 在 0 处的连续性可使

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.77)$$

因此可取充分小的 δ 使得

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq C\varepsilon, \quad (3.78)$$

定理得证.

定理 3.5

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为恒同逼近, $f \in L^1$, 则对任意 $\delta > 0$, $f * K_\delta(x)$ 可积, 且有

$$f * K_\delta \xrightarrow{L^1} f. \quad (3.79)$$

定理的证明与上一章中讨论 Fourier 变换时的操作类似.

3.3 函数的微分

本节讨论这样的问题: 那些函数 F (几乎处处) 可微, 且满足等式

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx, \quad (3.80)$$

下面讨论更大的一类函数: 有界变差函数.

3.3.1 有界变差函数

定义 3.8 (可求长曲线)

设 $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ 为一条平面参数曲线, 其中 x, y 为 $[a, b]$ 上的连续实值函数, 称 γ 是可求长的, 若存在 $M < \infty$ 使得对任意分割 $\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ 有

$$\sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M. \quad (3.81)$$

定义其长度为

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|. \quad (3.82)$$

注 另一方面, $L(\gamma)$ 也可以看作是满足前一式的 M 的下确界.

上述定义具有非常清楚的几何直观, 这实际上就是在用折线逼近 γ , 用折线的长度逼近 $L(\gamma)$.



图 3.1: 折线逼近

由此自然产生问题: x, y 满足何种解析性质时对应的 γ 可求长? 在微积分中一个熟知的计算公式为

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \quad (3.83)$$

那么 x, y 是否一定需要可微? 讨论这一问题的关键就是本节的主角: 有界变差函数.

定义 3.9 (有界变差函数)

对于 $[a, b]$ 上的复值函数 F 以及一个分割 $\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, 可以定义 F 关于这一分割的变差为

$$S_\pi = \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})|, \quad (3.84)$$

若 F 对任意分割 π 的变差存在一致的上界 $M < \infty$, 则称 F 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 记为 $f \in BV([a, b])$.



注

1. 有界变差与可求长曲线的定义很像, 但前者并没有要求 F 是连续的.
2. 称分割 π' 为 π 的一个 refinement, 若 F 在 π' 下的变差不小于 π 下的变差.
3. 若固定闭区间 $[a, b]$, 则其上有界变差函数的全体构成一个线性空间.

定理 3.6

曲线 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 可求长当且仅当 x, y 为有界变差函数.



证明 令 $F(t) = x(t) + iy(t)$, 注意到

$$|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq 2|F(t_k) - F(t_{k-1})|. \quad (3.85)$$

事实上, 有界变差函数的振荡不会很大, 考虑下面的例子.

例 3.6 若 F 为实值单调 (递增) 有界函数, 则

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| = F(b) - F(a) < \infty, \quad (3.86)$$

F 显然为有界变差函数.

例 3.7 若 F 处处可微, F' 有界, 则由中值定理可知存在 $M < \infty$ 使得

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \quad (3.87)$$

因此

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \leq M(b - a) < \infty, \quad (3.88)$$

此时 F 也为有界变差函数.

上面的条件可以减弱到 **Lipschitz 条件**, 即存在 M 使得对任意 $x, y \in [a, b]$ 有

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \quad (3.89)$$

但另一方面, 如果不假设 F' 的有界性, 结论可能不成立.

例 3.8 设 $a, b > 0$, 函数

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

则 F 为有界变差函数当且仅当 $a > b$.

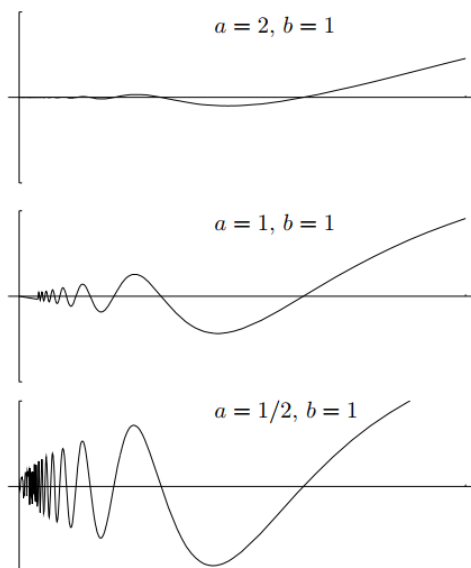


图 3.2: 三种情形

回到上面的第一个例子, 它看起来很简单, 但实际上借助单调函数就能很好地刻画有界变差函数, 首先定义全变差.

定义 3.10 (全变差)

对于函数 f , 定义其在 $[a, x] \subset [a, b]$ 上的全变差为

$$T_f(a, x) = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})|, \quad (3.91)$$

这里 π 为 $[a, x]$ 的分割.



注 易知, f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数当且仅当 $T_f(a, b)$ 有限.

全变差有很强的几何意义, 若将 f 看作一条“曲线”, 则 $T_f(a, b)$ 实际上对应了 f 在 $[a, b]$ 部分的“长度”.

命题 3.1

若 $f \in BV([a, b])$, 则对任意 $c \in [a, b]$ 有

$$T_f(a, c) + T_f(c, b) = T_f(a, b). \quad (3.92)$$



注 上述命题有对应的几何意义: 曲线可以分为两部分, 分别求长度得到总长.

证明 任意 $[a, c], [c, b]$ 的划分可以合并为 $[a, b]$ 上的划分, 因此 $T_f(a, c) + T_f(c, b) \leq T_f(a, b)$; 对任意 $[a, b]$ 的划分 $\pi: a = t_0 < \cdots < t_n = b$, 设 $c \in [t_m, t_{m+1}]$, 则

$$|f(t_{m+1}) - f(t_m)| \leq |f(t_{m+1}) - f(c)| + |f(c) - f(t_m)|, \quad (3.93)$$

故 π 可加细、拆分为 $[a, b], [b, c]$ 上的划分, 即得

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq T_f(a, c) + T_f(b, c), \quad (3.94)$$

对左边取上确界得证.

借助全变差可以立即得到一个很棒的分解:

$$f(x) = T_f(a, x) - (T_f(a, x) - f(x)), \quad (3.95)$$

显然 $T_f(a, x)$ 单调递增, 下面证明另一个也单调递增.

命题 3.2

$T_f(a, x) - f(x)$ 单调递增.

证明 只需证明对任意 $x < y$ 有

$$T_f(a, x) - f(x) \leq T_f(a, y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq T_f(x, y), \quad (3.96)$$

根据三角不等式, 这是显然的.

推论 3.4

f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 当且仅当 f 可以分解为两个有界单值函数的差.

也就是说, 对于有界变差函数的研究很多时候可以归结到单调函数上.

下面考虑 T_f 的连续性, 首先易知, $T_f(a, x)$ 在 c 处连续当且仅当同时成立

$$\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(a, x) = T_f(a, c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = 0, \quad (3.97)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} T_f(a, x) = T_f(a, c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} T_f(x, c) = 0, \quad (3.98)$$

这里考虑了一个与 $T_f(a, x)$ 对称的全变差 $T_f(x, c)$, 而在上面的条件下, 对任意 $\delta > 0$ 有

$$|f(c + \delta) - f(c)| \leq T_f(c, c + \delta), \quad |f(c - \delta) - f(c)| \leq T_f(c - \delta, c), \quad (3.99)$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 可得 f 在 c 处的连续性, 事实上, 反过来也是成立的, 考虑如下引理

引理 3.5

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则 f 在 $c \in [a, b]$ 连续当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} T_f(x, c) = 0, \quad (3.100)$$

当 c 为端点时, 只考虑单侧极限.

证明 只证明右极限式. 设 f 在 c 处连续, 若 $\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = \varepsilon > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (c, c + \delta)$ 有

$$|f(c) - f(x)| < \frac{1}{10}\varepsilon, \quad \frac{9}{10}\varepsilon \leq T_f(c, x) \leq \frac{11}{10}\varepsilon, \quad (3.101)$$

取 $[c, c + \delta]$ 的分割 π 使得

$$S_\pi \geq T_f(c, c + \delta) - \frac{1}{10}\varepsilon \geq \frac{8}{10}\varepsilon, \quad (3.102)$$

则有

$$S_\pi = |f(t_1) - f(c)| + \sum_{k=2}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq \frac{1}{10}\varepsilon + T_f(t_1, c + \delta) \Rightarrow T_f(t_1, c + \delta) \geq \frac{7}{10}\varepsilon, \quad (3.103)$$

$t_1 \in (c, c + \delta)$, 因此根据一开始的估计有

$$\frac{11}{10}\varepsilon \geq T_f(c, c + \delta) = T_f(c, t_1) + T_f(t_1, c + \delta) \geq \frac{9}{10}\varepsilon + \frac{7}{10}\varepsilon = \frac{16}{10}\varepsilon, \quad (3.104)$$

矛盾, 故 $\varepsilon = 0$.

回到曲线的情形, 设 γ 为 $[a, b]$ 上的可求长曲线, 则对任意 $A \leq B \in [a, b]$ 可定义长度函数 $L(A, B) = T_F(A, B)$, 这里 $F(t) = x(t) + iy(t)$, 则对任意 $C \in [A, B]$ 有

$$L(A, C) + L(C, B) = L(A, B). \quad (3.105)$$

事实上, 这里定义的函数 L 关于 A, B 都是连续的, 这根据前面的引理立得, 但是这里还是给出一个书上的证明.

首先证明第二个变量的连续性, 取 $[A, B]$ 的分割 $\pi: A = t_0 < \cdots < t_N = B$ 使得

$$S_\pi \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \geq L(A, B) - \varepsilon/2, \quad (3.106)$$

根据 F 的连续性, 只要 B_1 与 B 充分接近就有

$$|F(B_1) - F(B)| < \varepsilon/2, \quad (3.107)$$

考虑分割 $\pi': A = t_0 < \cdots < t_{N-1} < B_1$ (并记分点为 $s_0, \cdots, s_N = B_1$), 则

$$\sum_{k=1}^N |F(s_k) - F(s_{k-1})| = \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| + |F(B_1) - F(t_{N-1})| - |F(B) - F(t_{N-1})| \quad (3.108)$$

$$\geq \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| - |F(B_1) - F(B)| \quad (3.109)$$

$$\geq L(A, B) - \varepsilon, \quad (3.110)$$

由此可得 $L(A, B_1) \geq L(A, B) - \varepsilon$, 即 L 关于 B 左连续, 右连续的证明是类似的, 对于另一个分量亦然. 下面的定理是微分学的一个重要结论.

定理 3.7

若 F 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则 F 几乎处处可微.



由于有界变差函数可以分解为两个单调函数的差, 因此只需证明单调函数几乎处处可微.

定理 3.8 (Lebesgue)

设 f 为 $[a, b]$ 上的单增函数, 则

1. f' 几乎处处存在.
2. f' 可以看作 $[a, b] \rightarrow [0, +\infty]$ 的函数, f' 可积, 且有

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a). \quad (3.111)$$

3. f' 几乎处处有限.



作为准备工作, 下面考虑一些覆盖定理.

小的补充

最后补充一点, 有界变差函数的单调分解并不是唯一的, 也可以通过正/负变差进行分解, 对于实值函数 F , 可以定义其正/负变差为

$$P_F(a, x) = \sup_{(+)} \sum [F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad N_F(a, x) = \sup_{(-)} \sum -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \quad (3.112)$$

即分别取使得 $F(t_k) \geq F(t_{k-1}), F(t_k) \leq F(t_{k-1})$ 成立的 $[t_{k-1}, t_k]$, 再对所有分割取上确界.

引理 3.6

设 F 为 $[a, b]$ 上的实值有界变差函数, 则对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$F(x) - F(a) = P_F(a, x) - N_F(a, x), \quad (3.113)$$

$$T_F(a, x) = P_F(a, x) + N_F(a, x). \quad (3.114)$$



证明 根据上确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\pi: a = t_0 < \dots < t_N = x$ 满足

$$\left| P_F(a, x) - \sum_{(+)} [F(t_k) - F(t_{k-1})] \right| < \varepsilon, \quad \left| N_F(a, x) - \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \right| < \varepsilon \quad (3.115)$$

注意到

$$F(x) - F(a) = \sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) - \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad (3.116)$$

因此有

$$|[F(x) - F(a)] - [P_F(a, x) - N_F(a, x)]| < 2\varepsilon, \quad (3.117)$$

第一条得证. 注意到

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad (3.118)$$

两边取上确界有 $T_F \leq P_F + N_F$, 如果只对左边取上确界可得

$$\sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \leq T_F(a, x), \quad (3.119)$$

再对左边依次取上确界即得 $P_F + N_F \leq T_F$, 得证.

对于有界变差函数 F , 若令

$$F_1(x) = F(a) + P_T(a, x), \quad F_2(x) = N_T(a, x), \quad (3.120)$$

则 $F = F_1 - F_2$, 且 F_1, F_2 均为有界单增函数, 这就给出了另一种单调分解.

3.3.2 Vitali 覆盖定理

在证明 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型不等式时, 我们曾证明过这样的覆盖定理:

定理 3.9 (有限覆盖定理)

设 F 为 $\mathbb{R}^d$ 上的有限开球族, 则存在子族 $G \subset F$ 使得

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 3B. \quad (3.121)$$



其证明思路是不断取最大球, 扩大并删去一些小球, 其中的系数 "3" 来自于一个几何上的观察, 也即如下引理

引理 3.7

设球 $B \cap B' \neq \emptyset, r(B') \leq Lr(B)$, 则 $B' \subset (2L + 1)B$.



证明 画图, 根据三角不等式可得.

下面考虑一个无穷情形的覆盖定理.

定理 3.10 (无穷覆盖引理)

设 F 为无穷开球族, 半径一致小于 $R < \infty$, 则存在子族 G 使得

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 5B. \quad (3.122)$$



注 这里的系数 5 可以优化为 $3 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

证明 令

$$F_n = \{B \in F : R/2^n < r(B) \leq R/2^{n-1}\}, \quad (3.123)$$

下面分三步构造出所需子族.

Step 1. 根据 Zorn 引理, 取 $G_1 \subset F_1$, 这里 G_1 为 F_1 中所有不相交球子集的极大元.

Step 2. 设已选出了 $G_i \subset F_i, 1 \leq i \leq n-1$, 定义

$$H_n = \{B \in F_n : B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i\}, \quad (3.124)$$

取 $G_n \subset H_n$, 这里 G_n 为 F_n 中所有不相交球子集的极大元.

下证 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ 满足要求, 显然其中球两两不相交, 对任意 $B \in F_n$, 分如下情况讨论

1. 若 $B \notin H_n$, 则存在 $B' \in \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ 使得 $B \cap B' \neq \emptyset$, 而 $r(B) \leq r(B')$, 由上一条引理可知 $B \subset 3B'$.
2. 若 $B \in G_n$, 则 $B \subset B$.
3. 若 $B \in H_n, B \notin G_n$, 则存在 $B' \in G_n$ 使得 $B' \cap B \neq \emptyset$, 根据 F_n 的划分有 $r(B) \leq 2r(B')$, 因此 $B \subset 5B'$.

定义 3.11 (Vitali 覆盖)

给定子集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 称闭球族 F 为 E 的一个 Vitali 覆盖, 若对任意 $x \in E, \varepsilon > 0$, 存在 $B \in F$ 使得 $x \in B$ 且 $r(B) < \varepsilon$.



直观而言, Vitali 覆盖是指 E 的任一点都有半径任意小的圆盘覆盖.

引理 3.8 (Vitali 覆盖引理)

设 F 为集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的 Vitali 覆盖, 则存在无交球构成的子族 $G \subset F$ 几乎处处覆盖 E , 也即

$$m_* \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) = 0. \quad (3.125)$$



注 该定理对 E 的可测性没有要求.

证明 根据 Vitali 覆盖的定义, 可不妨设 F 中的球半径不超过 1, 根据无穷覆盖引理, 存在子族 $G \subset F$ 满足对应的覆盖性质, 只需证明对任意 $R > 0$ 有

$$m_* \left(B_R(0) \cap \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) \right) = 0, \quad (3.126)$$

则取 R 为正整数, 根据外测度的可数次可加性可知所求外测度为 0.

定义 $G' = \{B \in G : B \cap B_R(0) \neq \emptyset\}$, 则对任意 $B \in G'$ 有 $B \subset B_{R+2}(0)$, 根据 G 中球的无交性可得

$$m \left(\bigcup_{B \in G'} B \right) \leq m(B_{R+2}(0)) < \infty, \quad (3.127)$$

对任意 $\delta > 0$, 考虑

$$G'_1 = \{B \in G' : r(B) \geq \delta\}, \quad G'_2 = G' - G'_1, \quad (3.128)$$

则 $|G'_1| < \infty$ (其中所有球有界无交, 数量有限), 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 (对应的 G'_1, G'_2)

$$m(G'_2) = \sum_{B \in G'_2} m(B) < \varepsilon, \quad (3.129)$$

同时 $K = \bigcup_{B \in G'_1} B$ 为紧集, 则对任意 $x \in B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B)$, 由 Vitali 覆盖的定义知存在 $B \in F$ 使得

$$x \in B \subset B_R(0), \quad B \cap K = \emptyset, \quad (3.130)$$

进一步存在 $B' \in G$, 使得

$$B' \cap B \neq \emptyset, \quad B \subset 5B', \quad (3.131)$$

由于 $B' \cap B_R(0) \neq \emptyset$ (因为 $B \subset B_R(0)$, B, B' 有交), 因此 $B' \in G' = G'_1 \sqcup G'_2$, 而 $B' \cap K = \emptyset$ 说明 $B' \in G'_2$, 因此 G'_2 中的五倍球构成了 $B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B)$ 的覆盖, 计算外测度有

$$m_* \left(B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B) \right) \leq \sum_{B \in G'_2} m(5B) < 5^d \varepsilon, \quad (3.132)$$

根据 ε 的任意性得证.

推论 3.5

设 $m_*(E) < \infty$, F 为 E 的 Vitali 覆盖, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在无交球构成的有限子族 G 使得

$$m \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) < \varepsilon. \quad (3.133)$$



证明 存在开集 $U \supset E$ 使得 $m(U) \leq m_*(E) + 1 < \infty$, 定义 $F' = \{B \in F : B \subset U\}$, 则 F' 也是 E 的一个 Vitali 覆盖 (刚开始), 根据 Vitali 覆盖引理, 存在无交球族 $G' \subset F'$ 使得 $m_*(E - \bigcup_{B \in G'} B) = 0$, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{B \in G', r(B) < \delta} m(B) < \varepsilon, \quad (3.134)$$

定义 $G = \{B \in G' : r(B) \geq \delta\}$, 由于

$$E \cap G_1^c = (E \cap G_1^c \cap G_2^c) \sqcup (E \cap G_1^c \cap G_2) \subset (E - (G_1 \cup G_2)) \sqcup (E \cap G_2) \quad (3.135)$$

上面 G_1, G_2 分别表示 $G, G' - G$ 中所有球之并, 因此

$$m_* \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) \leq m_* \left(E - \bigcup_{B \in G'} B \right) + m_* \left(E \cap \bigcup_{B \in G', r(B) < \delta} B \right) \leq 0 + \varepsilon, \quad (3.136)$$

得证.

下面回到 Lebesgue 微分定理.

定理 3.11 (Lebesgue)

设 f 为 $[a, b]$ 上的单增函数, 则

1. f' 几乎处处存在, 几乎处处有限.
2. f' 可测, 可积且

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a). \quad (3.137)$$



$1 \Rightarrow 2$ 可定义 $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$ (若 $x + 1/n > b$ 则取 $f(x + 1/n) = b$), 则 f_n 几乎处处收敛到 f' , 故 f 可测, 由 Fatou 引理可知

$$\int_a^b f' \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b (f(x + 1/n) - f(x)) dx \leq f(b) - f(a). \quad (3.138)$$

因此只需证明 1. 对于函数 f , 其在一点的导数 (若存在) 定义为

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.139)$$

仿照借助上下极限研究极限的存在性, 这里引入 Dini 导数来讨论 f 在某一点导数的存在性.

定义 3.12 (Dini 导数)

记 $\Delta_h f = (f(x+h) - f(x))/h$, 定义

$$D^+ f = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \Delta_h f, \quad D_+ f = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \Delta_h f, \quad (3.140)$$

$$D^- f = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \Delta_h f, \quad D_- f = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \Delta_h f, \quad (3.141)$$

分别称为 f 在一点的右上/下导数, 左上/下导数.

**注**

1. 显然 $D_+ f \leq D^+ f, D_- f \leq D^- f$.
2. 若 $D_+ f = D^+ f = D_- f = D^- f$, 则 f' 存在.

下面证明 Lebesgue 微分定理的第一条.

定义

$$E_1 = \{D^+ f > D_- f\}, \quad E_2 = \{D^- f > D_+ f\}, \quad (3.142)$$

则对 $x \in (E_1 \cup E_2)^c$, 有

$$D^+ f \leq D_- f \leq D^- f \leq D_+ f \leq D^+ f, \quad (3.143)$$

即 f 可微, 下证 E_1, E_2 均零测. 作可数分解

$$E_1 = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} \{D^+ f > r > s > D_- f\} = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} A_{r,s} \quad (3.144)$$

下证每个 $A = A_{r,s}$ 均为零测集, 固定 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset A$ 使得

$$m(U) \leq (1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.145)$$

对任意 $x \in A$ 有 $D_- f < s$, 因此存在序列 $h_x^i \rightarrow 0^+$ 使得

$$\frac{f(x - h_x^i) - f(x)}{-h_x^i} < s \Leftrightarrow f(x) - f(x - h_x^i) < s h_x^i, \quad (3.146)$$

令

$$F = \{[x - h_x^i, x] \subset U : x \in A, \{h_x^i\}\}, \quad (3.147)$$

则 F 是 A 的 Vitali 覆盖, 根据 Vitali 覆盖引理的推论, 存在有限无交区间

$$\bigcup_{i=1}^n [x_i - h_i, x_i] \subset F, \quad m_* \left(A - \bigcup_{i=1}^n [x_i - h_i, x_i] \right) < \varepsilon, \quad (3.148)$$

进而可得

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < s \sum_{i=1}^n h_i \leq sm(U) \leq s(1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.149)$$

令 $B = A \cap \bigcup_{i=1}^n (x_i - h_i, x_i)$, 对任意 $y \in B$, 由于 $D^+ f > r$, 因此存在序列 $l_y^i \rightarrow 0^+$ 使得

$$f(y + l_y^i) - f(y) > r l_y^i, \quad (3.150)$$

令

$$F' = \{[y, y + l_y^j] \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i - h_i, x_i) : y \in B, \{l_y^j\}\}, \quad (3.151)$$

则 F' 为 B 的一个 Vitali 覆盖, 即存在无交区间

$$\bigcup_{j=1}^m [y_j, y_j + l_j] \subset F', \quad m_* \left(B - \bigcup_{j=1}^m [y_j, y_j + l_j] \right) < \varepsilon, \quad (3.152)$$

因此

$$\sum_{j=1}^m (f(y_j + l_j) - f(y_j)) > r \sum_{j=1}^m l_j > r(m_*(B) - \varepsilon) > r(m_*(A) - 2\varepsilon), \quad (3.153)$$

而 $[y_j, y_j + l_j] \subset (x_i - h_i, x_i)$, 因此由 f 的单调性可得

$$LHS \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) \leq s(1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.154)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可得

$$sm_*(A) \geq rm_*(A), \quad (3.155)$$

$s < r$ 说明 $m_*(A) = 0$, 得证.

上面是单调函数的结论, 下面回到有界变差函数.

推论 3.6

设 $f \in BV([a, b])$, 则 f' 几乎处处存在, 且

$$\int_a^b |f'| \leq T_f(a, b). \quad (3.156)$$



证明 作单调分解 (容易验证)

$$f(x) = T_f(a, x) - (T_f(a, x) - f(x)) \quad (3.157)$$

$$= \frac{1}{2}(T_f(a, x) + f(x)) - \frac{1}{2}(T_f(a, x) - f(x)) \quad (3.158)$$

$$= f_1(x) - f_2(x), \quad (3.159)$$

自然 f' 几乎处处存在, 由三角不等式有 (注意到 f'_1, f'_2 非负)

$$\int_a^b |f'| \leq \int_a^b |f'_1| + |f'_2| = \int_a^b f'_1 + \int_a^b f'_2 \leq (f_1(b) - f_1(a)) + (f_2(b) - f_2(a)) = T_f(a, b). \quad (3.160)$$

回到一开始的问题, 哪些函数满足微积分基本定理 (N-L 公式), 即

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a), \quad (3.161)$$

已经证明单调函数不满足这一等式, 那么连续函数是否满足这一结论? 考虑如下反例.

定义 3.13 (Cantor-Lebesgue 函数)

对于 Cantor 集 $\mathcal{C}$, 定义

$$F : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1] \quad (3.162)$$

$$F(x) = F\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}, \quad (3.163)$$

$x \in \mathcal{C}$ 当且仅当 x 的三进制数码只有 0, 2, 因此这样的定义是良好的, 再将这一定义延拓到 $[0, 1]$ 上, 注意到 $[0, 1] - \mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, 注意到 $F(a_i) = F(b_i)$, 因此定义

$$F(x) = a_i, \quad \forall x \in (a_i, b_i), \quad (3.164)$$

如上定义的函数 $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 被称为 Cantor-Lebesgue 函数.



注 容易验证 F 连续且单调递增, $F(0) = 0, F(1) = 1$.

注意到 F' 在 $[0, 1] - \mathcal{C}$ 中为 0, 而 $\mathcal{C}$ 为零测集, 因此

$$\int_0^1 F' = 0 \neq 1 = F(1) - F(0). \quad (3.165)$$

3.3.3 绝对连续函数

定义 3.14 (绝对连续函数)

称 f 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数 (记为 $f \in AC([a, b])$), 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对于 $[a, b]$ 中互不相交的区间

$$I_k = (a_k, b_k), 1 \leq k \leq n, \quad \sum_{k=1}^n |I_k| < \delta, \quad (3.166)$$

有

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \quad (3.167)$$



注

1. 考虑 $[x, x + \delta]$ 可知绝对连续函数必为连续函数.
2. 绝对连续必为有界变差: 对任意 $[a', b'] \subset [a, b], b' - a' < \delta$, 根据绝对连续的定义可知 $T_f(a', b') < \varepsilon$. 因此取 $\varepsilon = 1$, 存在 δ , 将 $[a, b]$ 分解为若干个长度小于 δ 的区间, 则 $T_f(a, b)$ 就能被控制住.
3. 所有 $[a, b]$ 上的绝对连续函数构成一个线性空间.
4. 绝对连续性中的区间个数可以加强到可数, 因为每次只需考虑有限个求和, 根据任意性可得估计.

例 3.9 Lipschitz 函数必为绝对连续函数, 因为这一类函数可以通过区间长度控制取值:

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) = M \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad (3.168)$$

例 3.10 若 $g \in L^1([a, b])$, 则 $f(x) = \int_a^x g$ 为绝对连续函数, 因为

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} g \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |g| = \int_{\bigcup_{k=1}^n I_k} |g|, \quad (3.169)$$

当 $\sum_{k=1}^n |I_k|$ 充分小时, 上面积分可以充分小 (积分的绝对连续性).

绝对连续函数有我们想要的性质.

定理 3.12

若 $f \in AC([a, b])$, 则

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a). \quad (3.170)$$



为证明上面的结论, 需要考虑两个附加结论: f' 几乎处处存在且在 $[a, b]$ 可积, 前者可以通过有界变差函数的条件得到, 后者先考虑如下引理.

引理 3.9

设 $f \in AC([a, b])$, 则 $f' = 0, a.e.$ 当且仅当 f 在 $[a, b]$ 为常数.



证明 只需证明 $f(a) = f(b)$, 而后对任意 $[a, x] \subset [a, b]$ 使用这一结论即可.

根据条件, 存在 $E \subset [a, b], m(E) = b - a$ 且在 E 中 $f' = 0$, 因此对任意 $\delta > 0, x \in E$, 存在 $\eta_x > 0$ 使得对任意包含 x 的 $[a_x, b_x]$, 当其长度 $b_x - a_x \leq \eta_x$ 时都有

$$|f(b_x) - f(a_x)| \leq \delta(b_x - a_x), \quad (3.171)$$

因此 $F = \{[a_x, b_x] : x \in [a, b], b_x - a_x \leq \eta_x\}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 根据 Vitali 覆盖引理, 存在互不相交的区间 $I_i = [a_i, b_i] \in F$ 使得

$$m\left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq m(E) - m\left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \geq m(E) - \varepsilon = b - a - \varepsilon, \quad (3.172)$$

因此

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \delta \sum_{i=1}^n |I_i| = \delta(b-a), \quad (3.173)$$

并且 $E' = [a, b] - \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigsqcup_{j=1}^m I'_j$, 其中 $I'_j = (x_j, y_j)$ 为开区间, 满足

$$\sum_{j=1}^m |I'_j| = m \left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \varepsilon, \quad (3.174)$$

根据绝对连续性的定义可取充分小的 ε 使得

$$\sum_{j=1}^m |f(y_j) - f(x_j)| < \delta, \quad (3.175)$$

综上可得

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{j=1}^m |f(y_j) - f(x_j)| \leq \delta(b-a+1), \quad (3.176)$$

由 δ 任意性得证.

下面证明前述定理, 由于 $f' \in L^1([a, b])$, 因此 $g(x) = \int_a^x f' \in AC([a, b])$, 根据 Lebesgue 微分定理有 $g' = f', a.e.$, 根据引理有

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) = \int_a^x f'. \quad (3.177)$$

推论 3.7

$f \in AC([a, b])$ 当且仅当存在 $g \in L^1([a, b])$ 使得对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g. \quad (3.178)$$

对于有界变差函数有 $\int_a^b |f'| dx \leq T_f(a, b)$, 而绝对连续函数可以使得该等号成立.

推论 3.8

若 $f \in AC([a, b])$, 则

$$\int_a^b |f'| = T_f(a, b). \quad (3.179)$$

证明 只需证明左边不小于右边, 对任意 $[a, b]$ 的分割 π 有

$$S_\pi = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f' \right| \leq \int_a^b |f'|, \quad (3.180)$$

对左边取上确界得证.

对于有界变差函数有分解

$$f(x) = \frac{1}{2}(T_f(a, x) + f(x)) - \frac{1}{2}(T_f(a, x) - f(x)), \quad (3.181)$$

可以证明绝对连续函数的全变差也绝对连续.

引理 3.10

若 $f \in AC([a, b])$, 则 $T_f(a, x) \in AC([a, b])$.

证明 对任意无交开区间组 $I_k = (a_k, b_k)$ 有

$$\sum_{k=1}^n |T_f(a, b_k) - T_f(a, a_k)| = \sum_{k=1}^n |T_f(a_k, b_k)| = \int_{\bigcup I_k} |f'|, \quad (3.182)$$

当 I_k 的总长度足够小时, 上面的积分也任意小 (可积函数积分的绝对连续性), 得证.

推论 3.9

任何绝对连续函数可以分解为两个单增绝对连续函数的差.



下面讨论绝对连续函数的一些几何特性.

对于连续函数 f , 它在 $[a, b]$ 中必有最小值、最大值 (均能取到), 再结合中值定理可知 f 将 $[a, b]$ 映为 $[m, M]$, 这里

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x). \quad (3.183)$$

若设 $f(s) = m, f(t) = M$ (不妨设 $s < t$), 则 $f([s, t]) = [m, M]$, 这时显然有

$$m(f([s, t])) = M - m = f(t) - f(s) = |f(t) - f(s)|, \quad (3.184)$$

也就是说 f 像集的测度有时可以通过端点值的差控制. 对于绝对连续函数有如下命题:

命题 3.3

若 $f \in AC([a, b])$, $E \subset [a, b]$ 零测, 则 $m(f(E)) = 0$, 即 f 将零测集映为零测集.



证明 对于零测集 $E \subset [a, b]$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset E$ 使得 $m(U) < \varepsilon$, 作开区间分解

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon, \quad f(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k]) \quad (3.185)$$

根据前面的讨论, 存在 $[s_k, t_k] \subset [a_k, b_k]$ 使得

$$f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k] = |f(t_k) - f(s_k)|, \quad (3.186)$$

因此

$$m(f(U)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(t_k) - f(s_k)|, \quad (3.187)$$

这一系列 $[s_k, t_k]$ 内部两两不相交, 且其测度可以被控制

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - s_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = m(U) < \varepsilon, \quad (3.188)$$

再利用 f 的绝对连续性, 当 ε 任意小时 $m(f(U))$ 可以任意小, 得证.

反之考虑不绝对连续的 Cantor-Lebesgue 函数, 它将 C 映为 $[0, 1]$, 即不将零测集映为零测集.

可测函数将 Borel 可测集 “拉回” 到 Lebesgue 可测集, 而绝对连续函数可以将可测集映为可测集.

推论 3.10

若 $f \in AC([a, b])$, $E \subset [a, b]$ 可测, 则 $f(E)$ 可测.



证明 根据 E 的可测性知存在分解

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup F, \quad (3.189)$$

其中 K_i 为闭集, F 为零测集 (实际上是分解为了一个 F_σ 集与零测集的并), 而连续函数将紧集 (有界闭集) 映为紧集, 故 $f(K_i)$ 可测, 而 $f(F)$ 零测, 故 $f(E)$ 可测.

反之是否成立? 答案是否定的, 比如符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, 那么加上连续的条件又如何? 答案还是否定的, 比如函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.190)$$

它将零测集映为零测集, 但不是有界变差函数, 故不绝对连续. 但是再加强一点即可.

定理 3.13

若 $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$ 且将零测集映为零测集, 则 $f \in AC([a, b])$.



注 从后面的证明可以看出, 这里有界变差可以减弱为“几乎处处可导存在且可积”.

首先证明引理:

引理 3.11

设 f 在 $[a, b]$ 上可测, f' 在 $E \subset [a, b]$ 上存在且有界 M , 则 $m_*(f(E)) \leq Mm_*(E)$.



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 考虑集合

$$E_n = \left\{ x \in E : \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M + \varepsilon, \forall 0 < |y - x| < 1/n \right\}, \quad (3.191)$$

则 $E_n \subset E_{n+1}$ 且有分解

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \quad (3.192)$$

对每个 E_n , 存在无交开区间 $I_{n,k}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| \leq m_*(E_n) + \varepsilon, \quad (3.193)$$

且可不妨设 $|I_{n,k}| < 1/n$ (细分即可), 则对任意 $s, t \in E_n \cap I_{n,k}$ 有

$$|f(s) - f(t)| \leq (M + \varepsilon)|s - t| \leq (M + \varepsilon)|I_{n,k}|, \quad (3.194)$$

注意到 $\mathbb{R}$ 中的任意集合都有

$$m_*(E) \leq \text{diam}(E) = \sup_{s, t \in E} |s - t|, \quad (3.195)$$

因此

$$m_*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq \text{diam}(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq (M + \varepsilon)|I_{n,k}|, \quad (3.196)$$

$$m_*(f(E_n)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (M + \varepsilon)|I_{n,k}| \quad (3.197)$$

$$\leq (M + \varepsilon)(m_*(E_n) + \varepsilon) \quad (3.198)$$

$$\leq (M + \varepsilon)(m_*(E) + \varepsilon), \quad (3.199)$$

$$\Rightarrow m_*(f(E)) \leq (M + \varepsilon)(m_*(E) + \varepsilon), \quad (3.200)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

引理 3.12

设 $E \subset [a, b]$ 可测, f 为可测函数且 f' 在 E 上存在, 则 (f' 在 E 中可测且)

$$m_*(f(E)) \leq \int_E |f'|. \quad (3.201)$$



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$E_n = \{x \in E : n\varepsilon < |f'(x)| \leq (n+1)\varepsilon\}, \quad (3.202)$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{f' \neq 0\}$, 对 $f(E_n)$ 有估计

$$m_*(f(E_n)) \leq (n+1)\varepsilon m(E_n) \leq \int_{E_n} |f'| + \varepsilon m(E_n), \quad (3.203)$$

因此

$$m_*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(f(E_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leq \int_E |f'| + \varepsilon m(E), \quad (3.204)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

下面证明前述定理.

$f \in BV([a, b])$ 说明 f' 可积且几乎处处存在, 对任意内部不相交的开区间 $I_k = (a_k, b_k)$, 存在分解 $A_k \sqcup B_k = I_k$ 使得 B_k 零测, f' 在 A_k 存在, 因此 (f 会将零测集映为零测集)

$$f(I_k) = f(A_k) \cup f(B_k) \Rightarrow m(f(I_k)) = m(f(A_k)), \quad (3.205)$$

进一步有 (考虑 $\mathbb{R}$ 上连续函数的性质)

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leq m_*(f(I_k)) \leq \int_{A_k} |f'|, \quad (3.206)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \int_{\bigcup A_k} |f'|, \quad (3.207)$$

根据积分的绝对连续性可知上面的求和充分小, 即 $f \in AC([a, b])$.

3.4 几何上的应用

高维连续曲线可以定义为映射 $\vec{f}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, 这里 $\vec{f}$ 为连续向量值函数, 并且进一步可以将一些定义作如下推广

1. $\vec{f} \in BV([a, b])$ 当且仅当每个 $f_i \in BV([a, b])$, 此时 $T_{\vec{f}}(a, b)$ 即为曲线长度.
2. $\vec{f} \in AC([a, b])$ 当且仅当每个 $f_i \in AC([a, b])$.

容易证明, 如此推广后的有界变差/绝对连续性依旧有一些熟悉的结论.

命题 3.4

若 $\vec{f} \in BV([a, b])$, 则

$$\int_a^b |\vec{f}'(t)| dt \leq T_{\vec{f}}(a, b). \quad (3.208)$$

证明 设 $g(t) = T_{\vec{f}}(a, t)$, 由于 g 单调递增, 故

$$\int_a^b g'(t) dt \leq g(b) - g(a) = T_{\vec{f}}(a, b), \quad (3.209)$$

并且几乎处处有

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{\vec{f}}(t, t+h)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)|}{h} \geq |\vec{f}'(t)|. \quad (3.210)$$

故

$$\int_a^b |\vec{f}'(t)| dt \leq \int_a^b g'(t) dt \leq T_{\vec{f}}(a, b), \quad (3.211)$$

得证.

命题 3.5

若 $\vec{f} \in AC([a, b])$, 则

$$T_{\vec{f}}(a, b) \leq \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt. \quad (3.212)$$

证明 取分割 $\pi: a = t_0 < \cdots < t_m = b$, 则

$$S_\pi = \sum_{i=1}^m |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \quad (3.213)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right| \quad (3.214)$$

$$\leq \int_a^b |f'(t)| dt, \quad (3.215)$$

对 π 取上确界得证.

上面的证明用到了高维的三角不等式, 下面简单证明

引理 3.13

设 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 可积, 则

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt. \quad (3.216)$$



证明

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| = \left\langle \int_a^b g(t) dt, \int_a^b g(s) ds \right\rangle \quad (3.217)$$

$$= \int_a^b \int_a^b \langle g(t), g(s) \rangle dt ds \quad (3.218)$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b |g(t)| |g(s)| dt ds \quad (3.219)$$

$$= \left(\int_a^b |g(t)| dt \right)^2, \quad (3.220)$$

得证.

因此当 $\vec{f} \in BV([a, b])$ 时, 称曲线**可求长**, 此时 $T_{\vec{f}}(a, b)$ 就是它的长度, 特别当 $\vec{f} \in AC([a, b])$ 时, 可以利用熟悉的方法 (微分) 计算曲线长, 即

$$L = T_{\vec{f}}(a, b) = \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt. \quad (3.221)$$

除了常见的参数化, 曲线还有另一种参数化方法, 即定义

$$s(t) = T_{\vec{f}}(a, t), \quad t \in [a, b], \quad (3.222)$$

则 $0 \leq s(t) \leq T_{\vec{f}}(a, b)$, 这表示曲线的长度, 称为**弧长参数化**. 若设 $g(s) = \vec{f}(t)$, 则

$$T_{\vec{g}}(0, s) = s, \quad (3.223)$$

因此对任意 $0 \leq s < t \leq L$ 有

$$|g(t) - g(s)| \leq T_g(s, t) = t - s, \quad (3.224)$$

即 g 满足 Lipschitz 条件, 说明 $g \in AC([0, s])$ 且几乎处处有 $|g'(s)| = 1$.

Minkovski 容度

定义 3.15

设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为紧集, 定义开集 $K^\delta = \{x : d(x, K) < \delta\}$, 定义

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad (3.225)$$

若该极限存在则称之为 K 的 Minkovski 容度.



注 当 K 为曲线时, Minkovski 容度可以看作用 K 附近的细管道 K^δ 逼近 K 的过程.

对应地, 也可以考虑上下极限

$$\mathcal{M}^*(K) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad \mathcal{M}_*(K) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad (3.226)$$

当二者相等时恰好等于 $\mathcal{M}(K)$.

例 3.11 若 $K = \{(0, 0)\}$ 时, $K^\delta = B_\delta(0)$, 即 $m(K^\delta) = \pi\delta^2$, 此时

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta} = 0. \quad (3.227)$$

例 3.12 若 $K = [0, 1] \times [0, 1]$, 则 $m(K^\delta) = 2\delta + \pi\delta^2$, 此时

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta} = 1. \quad (3.228)$$

例 3.13 若 $K = \overline{B_1(0)}$, 则 $K^\delta = B_{1+\delta}(0)$, $m(K^\delta) = \pi(1+\delta)^2$, 即 $\mathcal{M}(K) = +\infty$.

从上面的例子可以看出, Minkovski 容度有时可以刻画平面集合的维数, 不过下面我们主要着眼于曲线的情形.

定义 3.16 (简单曲线)

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$, 称 $\vec{f}$ 为简单曲线, 若 $\vec{f}$ (除端点外) 是单射.



命题 3.6

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 若 $\mathcal{M}_*(\Gamma) < \infty$, 则 $\mathcal{M}_*(\Gamma) \geq L$.



注 事实上, 如果曲线仅有有限处自交, 则它可以分解为不相交的部分, 因此命题也成立.

证明 Step 1. 证明 $m(\Gamma^\delta) \geq 2\delta|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|$.

通过一些平移+旋转, 可以不妨设 $\vec{f}(a) = (0, 0)$, $\vec{f}(b) = (z, 0)$, 则此时 $z = |\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|$. 任取 $t \in [0, z]$, 存在竖直直线 $l_t = \{(t, s) : s \in \mathbb{R}\}$, 根据曲线的连续性可断言 $\Gamma \cap l_t \neq \emptyset$.

设 $(t, \xi) \in \Gamma \cap l_t$, 则当 $|s - \xi| < \delta$ 时 $(t, s) \in \Gamma^\delta$, 即区间 $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset (\Gamma^\delta)_t$, 说明 $m((\Gamma^\delta)_t) \geq 2\delta$, 根据 Fubini 定理可得

$$m(\Gamma^\delta) \geq \int_0^z m((\Gamma^\delta)_t) dt \geq 2\delta z = 2\delta|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|. \quad (3.229)$$

Step 2. 考虑分割 $\pi : a = t_0 < \dots < t_m = b$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 其中每一段都存在 $[a_i, b_i] \subset (t_{i-1}, t_i)$ 使得

$$\sum_i |\vec{f}(b_i) - \vec{f}(a_i)| \geq \sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon, \quad (3.230)$$

定义 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t) : t \in [a_i, b_i]\}$, 则所有的 Γ_i 互不相交, 因此当 δ 充分小时所有的 $\{\Gamma_i^\delta\}$ 互不相交, 进而

$$m(\Gamma^\delta) \geq \sum_i m(\Gamma_i^\delta) \geq 2\delta \sum_i |\vec{f}(b_i) - \vec{f}(a_i)| \geq 2\delta \left(\sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon \right), \quad (3.231)$$

因此

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon, \quad (3.232)$$

对 π 取上确界, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

命题 3.7

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 则 $\mathcal{M}^*(\Gamma) \leq L$.

证明 可以不妨设 $\vec{f}$ 为弧长参数化, 则不妨设 $a = 0, b = L$, 并且

$$|\vec{f}'(t)| = 1, a.e., \quad |\vec{f}(s) - \vec{f}(t)| \leq |s - t|. \quad (3.233)$$

Step 1. 断言: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $E_\varepsilon \subset [0, L]$ 使得 $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, 并且存在 $r_\varepsilon > 0$ 使得对任意 $t \in E_\varepsilon^c$ 有

$$\sup_{0 < |h| < r_\varepsilon} \left| \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t) \right| < \varepsilon. \quad (3.234)$$

定义

$$F_n(t) = \sup_{0 < |h| < 1/n} \left| \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t) \right|, \quad (3.235)$$

则 $F_n(t) \rightarrow 0, a.e.$, 由 Egorov 定理, 存在 $E_\varepsilon : m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ 使得在 E_ε^c 中有 $F_n(t) \rightarrow 0$, 因此存在满足要求的 r_ε . 取 $\rho < r_\varepsilon$, 将 $[0, L]$ 分割为几乎不相交的小区间 $I_1, \dots, I_N$ 使得 $|I_k| = \rho$ (可以选出足够好的 ρ 使得恰好等分), 并且若 $I_k \subset E_\varepsilon$ 则称 I_k 为坏区间 (反之称为好区间). 设 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t) : t \in I_i\}$, 则 $\Gamma \subset \bigcup_i \Gamma_i$, 即

$$\Gamma^\delta \subset \bigcup_i \Gamma_i^\delta \Rightarrow m(\Gamma^\delta) \leq m\left(\bigcup_i \Gamma_i^\delta\right). \quad (3.236)$$

Step 2. 若 I_i 是坏区间, 则对任意 $s, t \in I_i$ 有

$$|\vec{f}(s) - \vec{f}(t)| \leq |s - t| \leq |I_i| = \rho \Rightarrow \Gamma_i \subset \overline{B_\rho(z)} \Rightarrow \Gamma_i^\delta \subset B_{\rho+\delta}(z), \quad (3.237)$$

即有 $m(\Gamma_i^\delta) \leq C(\rho + \delta)^2 \leq C(\rho^2 + \delta^2)$, 并且坏区间至多有 ε/ρ 个, 因此

$$m\left(\bigcup_{I_i \subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \leq C(\rho^2 + \delta^2) \frac{\varepsilon}{\rho} = O(\varepsilon(\rho + \frac{\delta^2}{\rho})). \quad (3.238)$$

Step 3. 若 $I_i = [a_i, b_i]$ 为好区间, 则存在 $t_0 \in [a_i, b_i]$ 使得 $t_0 \notin E_\varepsilon$, 根据断言有

$$\sup_{|h| < r_\varepsilon} |\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0) - h\vec{f}'(t_0)| < \varepsilon|h|, \quad (3.239)$$

并且 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t_0+h) : h \in [a_i - t_0, b_i - t_0]\}$, $0 \in [a_i - t_0, b_i - t_0]$ 说明 $|h| \leq b_i - a_i = |I_i| = \rho$, 通过平移、旋转, 可令 $\vec{f}(t_0) = (0, 0), \vec{f}'(t_0) = (1, 0)$, 因此对任意 $h \in [a_i - t_0, b_i - t_0]$ 有

$$|\vec{f}(t_0+h) - (h, 0)| < \varepsilon|h| \leq \varepsilon\rho, \quad (3.240)$$

这实际上说明 $\vec{f}(t_0+h)$ 的 x 坐标在 $h \pm \varepsilon\rho$ 内, y 坐标在 $\pm\varepsilon\rho$ 内, 因此可用长方形覆盖:

$$\Gamma_i \subset [a_i - t_0 - \varepsilon\rho, b_i - t_0 + \varepsilon\rho] \times [-\varepsilon\rho, \varepsilon\rho] \quad (3.241)$$

$$\Rightarrow \Gamma_i^\delta \subset [a_i - t_0 - \varepsilon\rho - \delta, b_i - t_0 + \varepsilon\rho + \delta] \times [-\varepsilon\rho - \delta, \varepsilon\rho + \delta] \quad (3.242)$$

即得

$$m(\Gamma_i^\delta) \leq (b_i - a_i + 2\varepsilon\rho + 2\delta)(2\varepsilon\rho + 2\delta) \quad (3.243)$$

$$= (\rho + 2\varepsilon\rho + 2\delta)(2\varepsilon\rho + 2\delta) \quad (3.244)$$

$$= 2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \varepsilon\rho\delta + \delta^2) \quad (3.245)$$

$$= 2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \delta^2). \quad (3.246)$$

而所有好区间的个数不超过 L/ρ , 因此

$$m\left(\bigcup_{I_i \not\subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \leq \frac{L}{\rho}(2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \delta^2)) \quad (3.247)$$

$$= 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}), \quad (3.248)$$

Step 4. 综上可得

$$m(\Gamma^\delta) \leq m\left(\bigcup_{I_i \subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) + m\left(\bigcup_{I_i \not\subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \quad (3.249)$$

$$= O(\varepsilon\rho + \frac{\varepsilon\delta^2}{\rho}) + 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}) \quad (3.250)$$

$$= 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}), \quad (3.251)$$

$$\frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \leq L + O(\frac{\varepsilon\rho}{\delta} + \frac{\delta}{\rho}), \quad (3.252)$$

取 $\rho = \delta/\varepsilon^{1/2}$, 则 $O(\frac{\varepsilon\rho}{\delta} + \frac{\delta}{\rho}) = O(\varepsilon^{1/2})$, 因此

$$\mathcal{M}^*(L) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \leq L + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.253)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

根据上面两个命题可得

推论 3.11

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 则 $\mathcal{M}(\Gamma) = L$.

等周不等式

定理 3.14 (等周不等式)

对于有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 为简单可求长曲线, 长度固定为 L , 则

$$m(\Omega) \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (3.254)$$

证明 定义

$$\Omega_+(\delta) = \overline{\Omega}^\delta, \quad \Omega_-(\delta) = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \delta\}, \quad (3.255)$$

则 $\Omega_+(\delta) = \Omega_-(\delta) \sqcup \Gamma^\delta$, 考虑 $B_\delta(0)$, 则

$$\Omega + B_\delta(0) \subset \Omega_+(\delta), \quad \Omega_-(\delta) + B_\delta(0) \subset \Omega, \quad (3.256)$$

这里 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. 由 Brunn-Minkovski 不等式可得

$$m(\Omega_+(\delta)) \geq [m(\Omega)^{1/2} + m(B_\delta(0))]^2 \quad (3.257)$$

$$\geq m(\Omega) + 2m(\Omega)^{1/2}m(B_\delta(0))^{1/2} \quad (3.258)$$

$$= m(\Omega) + 2\pi^{1/2}\delta^{1/2}m(\Omega)^{1/2}, \quad (3.259)$$

同理可得

$$m(\Omega) \geq m(\Omega_-(\delta)) + 2\pi^{1/2}\delta^{1/2}m(\Omega_-(\delta))^{1/2}, \quad (3.260)$$

相减可得

$$m(\Gamma^\delta) = m(\Omega_+(\delta)) - m(\Omega_-(\delta)) \geq 2\pi^{1/2}\delta[m(\Omega)^{1/2} + m(\Omega_-(\delta))^{1/2}], \quad (3.261)$$

因此

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \pi^{1/2} \lim_{\delta \rightarrow 0} [m(\Omega)^{1/2} + m(\Omega_-(\delta))^{1/2}] = 2\pi^{1/2}m(\Omega)^{1/2}, \quad (3.262)$$

平方得证.

附录 A 补充内容

A.1 集合的势

考虑集合势的动机在于比较两个集合中元素的多少，一般认为两集合间存在双射时，它们“元素个数”相等，由此定义等势。

定义 A.1 (等势)

设 A, B 为集合，称 A, B 等势，当且仅当存在双射 $f: A \rightarrow B$ ，记为 $A \sim B$ 。



注 容易验证，等势为一个等价关系，等势也可以记为 $\overline{A} = \overline{B}$ 。

引理 A.1

设有集合 X, Y ， $f: X \rightarrow Y$ ， $g: Y \rightarrow X$ ，则有分割 $X = A \cup A'$ ， $Y = B \cup B'$ ， $A \cap A' = B \cap B' = \emptyset$ ，其中 $f(A) = B$ ， $g(B') = A'$ 。



证明 不妨设 $f(X) \neq Y$ ，令

$$\Gamma = \{E \subset X : E \cap g(f(E)^c) = \emptyset\}, \quad A = \bigcup_{E \in \Gamma} E \quad (\text{A.1})$$

再令 $B = f(A)$ ， $B' = f(A)^c$ ， $A' = g(B')$ ，则 $Y = B \cup B'$ ， $B \cap B' = A \cap A' = \emptyset$ ，若 $X \neq A \cup A'$ ，则存在 $x_0 \in X$ ， $x_0 \notin A \cup A'$ ，令 $A_0 = \{x_0\} \cup A$ ，则 $B = f(A) \subset f(A_0)$ ， $f(A_0)^c \subset B'$ ，这说明 $g(f(A_0)^c) \subset A'$ ，由于 $A' \cap A_0 = \emptyset$ ，因此 $A_0 \cap g(f(A_0)^c) = \emptyset$ ，这与 A 的极大性矛盾。

定理 A.1 (Cantor-Bernstein)

若存在两个单射 $f: X \rightarrow Y$ ， $g: Y \rightarrow X$ ，则 $X \sim Y$ 。



证明 根据上一条引理，可做分割 $X = A \cup A'$ ， $Y = B \cup B'$ ， $f(A) = B$ ， $g(B') = A'$ 由于 $f: A \rightarrow B$ ， $g^{-1}: A' \rightarrow B'$ 均为双射，因此可以构造双射

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in A', \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

即得 $X \sim Y$ 。

设 $\alpha = \overline{A}$ ， $\beta = \overline{B}$ ，那么若存在单射 $A \rightarrow B$ ，则称 $\alpha \leq \beta$ ，若进一步不存在二者间的双射，则称 $\alpha < \beta$ ，C-B 定理实际上说明：若 $\alpha \leq \beta$ ， $\beta \leq \alpha$ ，则 $\alpha = \beta$ 。常见的集合中，定义正整数 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$ ，称一个集合可数，当且仅当其基数为 $\aleph_0$ 。

定理 A.2

设 $A \neq \emptyset$ ，则 $2^A \not\sim A$ 。



证明 假设 $A \sim 2^A$ ，则存在双射 $f: A \rightarrow 2^A$ ，设 $B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset 2^A$ ，则存在 $y \in A$ ， $B = f(y) \in 2^A$ ，若 $y \in B$ ，则根据定义可知 $y \notin f(y) = B$ ，矛盾；若 $y \notin B$ ，则根据定义 $y \in f(y) = B$ ，矛盾。

Baire 定理

定理 A.3 (Baire)

设 F_n 为闭集且无内点, 则 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 也无内点.

证明 若不然, 设 $x \in F$ 为 F 的内点, 则存在 $r > 0$, 使得

$$B_r(x) \subset F, \quad (\text{A.3})$$

因为闭集 F_1 无内点, 因此存在 $x_1 \in B_r(x)$, $r_1 > 0$ 使得

$$B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), \quad B_{r_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset, \quad (\text{A.4})$$

同理对于 F_2 可取 $x_2 \in B_{r_1}$, $r_2 > 0$ 满足类似性质, 以此类推可得点列与数列 $\{x_k\}, \{r_k\}$ 满足

$$B_{r_k}(x_k) \subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1}), \quad B_{r_k}(x_k) \cap F_k = \emptyset, \quad (\text{A.5})$$

并且可不妨设每个 $r_k < 1/k$. 注意到对任意 x_k , 都有 $x_{k+m} \in B_{r_k}(x_k)$, 因此

$$|x_k - x_{k+m}| \leq r_k < \frac{1}{k}, \quad (\text{A.6})$$

故 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 根据实数的完备性可知其收敛, 记其极限为 $y \in F$ ($B_r(x)$ 为闭集), 利用三角不等式可得

$$|y - x_k| \leq |y - x_{k+m}| + |x_k - x_{k+m}| \leq |y - x_{k+m}| + r_k, \quad (\text{A.7})$$

令 $m \rightarrow \infty$ 可得

$$|y - x_k| \leq r_k < \frac{1}{k} \quad (\text{A.8})$$

也就是说对任意 k , $y \in B_{1/k}(x_k) \in F_k^c$, 即 $y \in F^c$, 矛盾.

注意到闭集 F_k 无内点等价于开集 F_k^c 稠密 (任何 $x \in F_k$, $B_r(x)$ 中都有 F_k^c 中的点), 最后的交集 F 无内点等价于 F^c 稠密, 因此 Baire 定理有如下等价形式:

定理 A.4 (Baire)

若 U_n 为稠密开集, 则 $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ 稠密.

定义 A.2 (疏集)

若集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 无内点, 则称 E 为疏集, 或记为

$$\overline{E}^\circ = \emptyset \iff \overline{\overline{E}^c} = \mathbb{R}. \quad (\text{A.9})$$

命题 A.1

有限个疏集的并仍然是疏集.

证明 设 $E_1, \dots, E_n$ 为疏集, 只需证明

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n E_k}^\circ = \emptyset \iff \left(\overline{\bigcup_{k=1}^n E_k} \right)^\circ = \overline{\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right)^c} = \mathbb{R}, \quad (\text{A.10})$$

显然有

$$\overline{\left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right)^c} \supset \overline{\left(\bigcup_{k=1}^n \overline{E_k}^c \right)^c} = \overline{\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{E_k} \right)^c} = \mathbb{R}, \quad (\text{A.11})$$

最后一个等号使用了 Baire 纲定理, $\overline{E_k}^c$ 为稠密开集, 其交依然稠密.

A.2 Cantor 集

本节讨论 Cantor 集的一些性质, 包括 Stein 的一些习题.

命题 A.2

1. Cantor 集是完全不连通的, 即对任意 $x, y \in C$, 存在二者之间的数 $z \notin C$.
2. Cantor 集是完全集 (即所有点都是极限点, 无孤立点).

证明

1. 对任意 $x, y \in C$, 必定存在某个区间 C_k 包含二者, 且继续划分可以将二者二分到两个集合中, 此时取中间元素即可.
2. 设 $x \in C$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在长度为 $1/3^k$ 的区间 C_{n_k} 包含 x , 取其右端点 y_k , 则 $|x - y_k| \leq 1/3^k$, 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时 $y_k \rightarrow x$, 故 x 为 C 的极限点.

命题 A.3 (Cantor 集的三进制表示)

1. 任何 $x \in [0, 1]$ 都能表示为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1, 2\}, \quad (\text{A.12})$$

而这种表示并不是唯一的, 注意到 $1/3 = \sum_{k=2}^{\infty} 2/3^k$, 试证明 $x \in C$ 当且仅当任何 $a_k \in \{0, 2\}$.

2. 定义 C 上的 Cantor-Lebesgue 函数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad b_k = a_k/2, \quad (\text{A.13})$$

试证明 F 为连续函数.

3. 证明前述 F 为满射, 由此说明 C 为不可数集.
4. 考虑 F 从 C 到 $[0, 1]$ 的延拓, 使得若任意 $(a, b) \in [0, 1] - C$, 则 $F(a) = F(b)$, 证明如此延拓后的函数 F 在 $[0, 1]$ 连续.

证明

1. 约定 p 进制数码表示

$$0.a_1 \cdots a_k \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}, \quad (\text{A.14})$$

则借助三进制表示, 可将构造 C 过程中的区间重述为

$$C_0 = [0, 1] \quad (\text{A.15})$$

$$C_1 = [0, 0.1] \cup [0.2, 1] \quad (\text{A.16})$$

$$C_2 = [0, 0.01] \cup [0.02, 0.1] \cup [0.2, 0.21] \cup [0.21, 1] \quad (\text{A.17})$$

$$\cdots, \quad (\text{A.18})$$

根据 Cantor 集的定义, $x \in C$ 当且仅当其满足如下某一点:

- (a). x 不为任何区间的端点, 则 x 的数码均为 0 或 2;
 - (b). x 为某个区间的端点 $0.a_1 \cdots a_k 1$, 其中 $a_i \in \{0, 2\}$, 由于 $0.1 = 0.022 \cdots$, 因此可以化到 $\{0, 2\}$ 形式, 得证.
2. 首先证明良定性, 若对于某个 $x \in C$, 存在两种三进制表示 $x = 0.a_1 \cdots a_k \cdots = 0.b_1 \cdots b_k \cdots$, 其中 $a_i, b_j \in \{0, 2\}$, 则有最小的指标 k 满足 $a_1 = b_1, \cdots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \neq b_k$, 不失一般性可设 $k = 1$, 不妨设 $a_1 = 0, b_1 = 2$, 则二者相同说明

$$0.0a_2 \cdots a_k \cdots = 0.2b_2 \cdots b_k \cdots \quad (\text{A.19})$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{2}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{3^k} \quad (\text{A.21})$$

但是 $-2 \leq a_k - b_k \leq 2$, 因此 $-1/3 \leq \text{RHS} \leq 1/3$, 矛盾, 因此这种三进制表示是唯一的, 良定性自然.

下面证明连续性. 设 $x, y \in C, |x - y| = d$, k 为最大的, 使得 x, y 包含在 C_k 中同一个闭区间, 则

$$x = 0.c_1 \cdots c_{k-1} a_k \cdots, \quad y = 0.c_1 \cdots c_{k-1} b_k \cdots, \quad (\text{A.22})$$

这说明

$$|F(x) - F(y)| = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\text{A.23})$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 K 使得 $1/2^{K-1} < \varepsilon$, 因此只要 $d < 1/3^k$, 就有对应的 $k \geq K$, 因此

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{K-1}} < \varepsilon, \quad (\text{A.24})$$

连续性得证.

3. 只需构造任意 $y \in [0, 1]$ 的二进制表示 $0.a_1 \cdots a_n \cdots$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 则取 $x = 0.(2a_1)(2a_2) \cdots (2a_n) \cdots \in C$, 则有 $F(x) = y$.

设 $y \in [0, 1]$, 定义

$$a_1 = \begin{cases} 0, & y < 1/2 \\ 1, & y \geq 1/2 \end{cases} \quad a_k = \begin{cases} 0, & y - 0.a_1 \cdots a_{k-1} < 1/2^k \\ 1, & y - 0.a_1 \cdots a_{k-1} \geq 1/2^k \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

其中 $k > 1$, 则有 $y = 0.a_1 \cdots a_k \cdots$, 得证.

4. 根据 C 的构造过程, 任何 $C^c \cap [0, 1]$ 中的开区间必然包含在某个开区间 $(0.a_1 \cdots a_k 1, 0.a_1 \cdots a_k 2)$ 中, 证明 F 在这两个端点取值相等实际上只需证明 $F(0.1) = F(0.2)$ (三进制下), 这又只需证明

$$F(0.022 \cdots) = 0.011 \cdots = 0.1 \quad (\text{A.26})$$

其中 F 的像表示为二进制, 计算可得

$$0.011 \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} = 0.1, \quad (\text{A.27})$$

得证.

命题 A.4 (含参 Cantor 集)

设 $\xi \in (0, 1)$, 将 Cantor 集构造过程中每次挖去的相对长度由 $1/3$ 变为 ξ , 定义由此得到的集合为 C_ξ (特别有 $C = C_{1/3}$), 试证明

1. $[0, 1] - C_\xi$ 可以划分为无交开区间的并, 且其总长度等于 1.
2. $m_*(C_\xi) = 0$.



证明

1. 将 Cantor 集构造过程中的记号推广, 则

$$C_\xi = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k(\xi), \quad C_\xi^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k^c(\xi), \quad (\text{A.28})$$

其中每个 $C_k^c(\xi)$ 都是开区间的有限并, 则 C_ξ 是开区间的可数并. 其中 $C_k^c(\xi)$ 中开区间长度之和为

$$\xi_0 + 2\xi_1 + \cdots + 2^k \xi_k, \quad (\text{A.29})$$

其中 $\xi_n = \xi[(1 - \xi)/2]^n$, 因此上述求和结果为

$$\xi \cdot \frac{1 - (1 - \xi)^k}{1 - (1 - \xi)} = 1 - (1 - \xi)^k \quad (\text{A.30})$$

令 $k \rightarrow \infty$ 得证 (这里用到了 $C_k^c(\xi)$ 的单调性) .

2. 对任意 k 有 $C_\xi \subset C_k(\xi)$, 而 $m_*(C_k(\xi)) = (1 - \xi)^k$, 故 $m_*(C) \leq m_*(C_k(\xi)) = (1 - \xi)^k$, 令 $k \rightarrow 0$ 得证.

命题 A.5 (类 Cantor 集)

在 C 的构造中, 设第 k 步挖去集合的相对长度为 l_k , 且

$$l_1 + 2l_2 + \cdots + 2^{k-1}l_k < 1, \quad (\text{A.31})$$

定义如此构造出的集合为 $\hat{C}$, 试证明

1. 若 l_j 充分小, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}l_k < 1$, 则 $m(\hat{C}) > 0$, 事实上

$$m(\hat{C}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}l_k. \quad (\text{A.32})$$

2. 若 $x \in \hat{C}$, 则存在点列 $\{x_n\} \subset \hat{C}^c$, $x_n \rightarrow x$ 且 $x_n \in I_n \subset \hat{C}^c$, $|I_n| \rightarrow 0$.

3. $\hat{C}$ 为完全集, 且不包含任何开区间.

4. $\hat{C}$ 不可数.



证明

1. 以此法构造出的集合 $\hat{C}$ 仍可表示为可数闭集的交, 因此可测, 设 $\hat{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \hat{C}_k$, 则 C_k 单调递减, 且 $m(C_1) = 1 < \infty$, 因此

$$m(\hat{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\hat{C}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{k=1}^n 2^{k-1}l_k \right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}l_k. \quad (\text{A.33})$$

2. 设 $x \in x_n$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\hat{C}_n$ 被挖去的开区间中距离 x 最近的端点为 y_k , 则构造 $x_k = y_k + l_k/2$ (若为右端点则构造 $x_k = y_k - l_k/2$), 则

$$|x_k - x| \leq |x_k - y_k| + |y_k - x| \leq l_k + \frac{l_{k-1} - l_k}{2} = \frac{l_{k-1} + l_k}{2} \quad (\text{A.34})$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}l_k$ 收敛, 因此 $l_k \rightarrow 0$, 故 $x_k \rightarrow x$, 但 $x \notin \hat{C}$. 可以定义 $I_n = (y_k - l_k/2, y_k + l_k/2)$, 则 $|I_n| = l_k \rightarrow 0$.

3. 对任意 $x \in \hat{C}$, 取上一问中的点列 $\{y_k\} \subset \hat{C}$, 且 $y_k \rightarrow x$, 故 $\hat{C}$ 为完全集; 若 $(a, b) \subset \hat{C}$, 则每次挖去开区间后, (a, b) 会恰好位于某个连通分支内, 设 L_k 表示第 k 次操作后 (a, b) 所在连通分支的长度, 则

$$L_k = \frac{1}{2^k} m(\hat{C}_k) \leq \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \quad (\text{A.35})$$

而 $(a, b) \subset L_k$, $L_k \geq b - a$, 矛盾, 故不包含开区间.

4. $\hat{C}$ 的构造方式也可以建立与 $\{0.a_1 \cdots a_k \cdots : a_i \in \{0, 2\}\}$ 之间的双射, 进一步建立与 $[0, 1]$ 的双射 (如题 2), 因此不可数.

A.3 依测度收敛与其余收敛性间的关系

本节假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 所有函数都是几乎处处有限的可测函数.

定义 A.3 (依测度收敛)

称 $\{f_n\}$ 在 E 上依 (Lebesgue) 测度收敛于 f ($f_n \xrightarrow{m} f$), 若对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0. \quad (\text{A.36})$$



命题 A.6

依测度收敛的极限唯一, 即若 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \xrightarrow{m} \tilde{f}$, 则 $f = \tilde{f}, a.e.$



证明 若 $|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon$, 则

$$|f - f_n| + |\tilde{f} - f_n| \geq \varepsilon, \quad (\text{A.37})$$

因此有

$$|f - f_n| \geq \varepsilon/2, \text{ or } |\tilde{f} - f_n| \geq \varepsilon/2, \quad (\text{A.38})$$

也就是说

$$\{|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon\} \subset \{|f - f_n| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|\tilde{f} - f_n| \geq \varepsilon/2\}, \quad (\text{A.39})$$

$$m(|f - \tilde{f}| \geq \varepsilon) \leq m(\{|f - f_n| \geq \varepsilon/2\}) + m(\{|\tilde{f} - f_n| \geq \varepsilon/2\}), \quad (\text{A.40})$$

令 $n \rightarrow \infty$ 可知左边的集合零测, 得证.

事实上, 根据一种收敛可以定义什么是闭集, 进一步可定义开集, 也即诱导出了可测函数空间的一个拓扑.

三种收敛性关系

1. 几乎处处收敛: 称 E 上 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ (Lebesgue 测度), 若

$$m(\{x \in E : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| > 0\}) = 0. \quad (\text{A.41})$$

2. 近一致收敛: 称 E 上 f_n 近一致收敛于 f , 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_\varepsilon \subset E$, 使得

$$m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon, \quad f_n \rightrightarrows f, \text{ on } E_\varepsilon. \quad (\text{A.42})$$

在数学分析中, 一致收敛强于逐点收敛, 这里的三种收敛性同样有一些强弱关系. 当 $m(E) = +\infty$ 时, 近一致收敛可以推出几乎处处收敛与依测度收敛; 当 $m(E) < \infty$ 时, 近一致收敛与几乎处处收敛等价, 二者都能推出依测度收敛, 也就是下图:

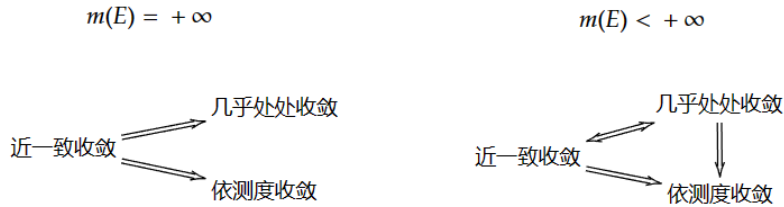


图 A.1: 三种收敛关系

显然近一致收敛强于几乎处处收敛, 因为当近一致收敛时, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_\varepsilon \subset E$, $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$, 并且在 E_ε 中 f_n 一致收敛, 因此 f_n 不收敛的点均在 $E - E_\varepsilon$ 中, 这样的集合测度可以任意小, 自然为零测集. 另一方面, 第一章中的 Egorov 定理表明在有限测度的情况下, 几乎处处收敛可推出近一致收敛, 因此剩下的问题只有两个, 证明:

1. 任何情况下, 近一致收敛可推出依测度收敛.
2. 有限测度下, 几乎处处收敛可推出依测度收敛.

下面进一步讨论这些关系, 主要议题如下:

1. 几乎处处收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛 (有限测度集);
2. 近一致收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛 (不要求 $m(E) < \infty$);
3. 依测度收敛具有某种完备性;
4. 依测度收敛有近一致收敛子列 (cor: 依测度收敛有几乎处处收敛子列);
5. 依测度收敛 $\Rightarrow$ 任意子列有近一致收敛子列 (cor: 有限测度时, 依测度收敛 $\iff$ 任一子列有几乎处处收敛子列);

命题 A.7

设 $m(E) < \infty$, 函数列 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则 $f_n \xrightarrow{m} f$.



证明 极限函数的收敛/不收敛集可如下刻画:

$$A = \{x \in E : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\} \quad (\text{A.43})$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\}, \quad (\text{A.44})$$

$$A^c = \{x \in E : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| < 1/m\} \quad (\text{A.45})$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x \in E : |f_n - f| < 1/m\}. \quad (\text{A.46})$$

$$(\text{A.47})$$

而 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 说明 $m(A) = 0$, 因此对任意 m 有 (注意到 $m(E) < \infty$)

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\}\right) = 0, \quad (\text{A.48})$$

最后

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\}\right) = 0, \quad (\text{A.49})$$

$$\{x \in E : |f_k - f| \geq 1/m\} \subset \bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\} \quad (\text{A.50})$$

$$\Rightarrow m(\{x \in E : |f_k - f| \geq 1/m\}) \leq m\left(\bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\}\right), \quad (\text{A.51})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k - f| \geq 1/m\}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n \geq k} \{x \in E : |f_n - f| \geq 1/m\}\right) = 0, \quad (\text{A.52})$$

故 f_n 依测度收敛到 f , 得证.

命题 A.8

若 f_n 近一致收敛到 f , 则 $f_n \xrightarrow{m} f$.



证明 固定 $\varepsilon > 0$, 设

$$E_n = \{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}, \quad (\text{A.53})$$

由于 f_n 近一致收敛, 因此对任意 $\delta > 0$, 存在可测集 $E_\delta \subset E$, $m(E - E_\delta) < \delta$, 并且在 E_δ 中 $f_n \rightrightarrows f$, 由于

$$E_n = (E_n \cap E_\delta) \cup (E_n \cap (E - E_\delta)) \quad (\text{A.54})$$

$$\subset (E_n \cap E_\delta) \cup (E - E_\delta), \quad (\text{A.55})$$

根据 f_n 在 E_δ 中的一致收敛性, 存在 N_δ , 当 $n > N_\delta$ 时有 $E_n \cap E_\delta = \emptyset$, 因此对任意 $n > N$ 有

$$m(E_n) \leq m(E_n \cap E_\delta) + m(E - E_\delta) < \delta, \quad (\text{A.56})$$

这实际上说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \leq \delta, \quad (\text{A.57})$$

根据 δ 的任意性可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0$, 再根据一开始 ε 的任意性, 即得 $f_n \xrightarrow{m} f$.

下面考虑第 3、4 条, 为了刻画完备性, 首先引入依测度 Cauchy 列的概念.

定义 A.4 (依测度 Cauchy 列)

称 $\{f_n\}$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列, 若对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n - f_m| \geq \varepsilon\}) = 0. \quad (\text{A.58})$$

Cauchy 列总是用来刻画完备性, 因此自然会产生问题: 依测度 Cauchy 列是否存在几乎处处有限的可测函数 f , 使得 $f_n \xrightarrow{m} f$? 这就是上面提到的某种完备性, 幸运的是依测度收敛恰好有这种完备性.

命题 A.9

若 f_n 为依测度 Cauchy 列, 则存在几乎处处有限的可测函数 f 使得 $f_n \xrightarrow{m} f$.

证明 由于 $|f_n - f| \leq |f_{n_k} - f| + |f_{n_k} - f_n|$, 因此

$$m(\{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq m(\{x \in E : |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon/2\}) + m(\{x \in E : |f_{n_k} - f_n| \geq \varepsilon/2\}), \quad (\text{A.59})$$

根据依测度 Cauchy 列的定义可知后一部分当 $n \rightarrow \infty$ 时为零测集 (这里将 n_k 改为 k_n 或许更好), 因此只需证明存在几乎处处有限的可测函数 f , 以及 f_n 的一个子列 f_{n_k} 依测度收敛到 f . 只需证明如下断言:

断言 1: 若 $\{f_n\}$ 为依测度 Cauchy 列, 则存在满足条件的 f 以及子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 f_{n_k} 近一致收敛到 f (近一致收敛更强).

进一步断言 2: 若 $\{f_n\}$ 为依测度 Cauchy 列, 则存在 f_{n_k} 使得

$$m(\{x \in E : |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\}) < \frac{1}{2^k}. \quad (\text{A.60})$$

当满足断言 2 时, 令

$$E_k = \{x \in E : |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq 1/2^k\}, \quad (\text{A.61})$$

$$F_n = \bigcap_{k \geq n} E_k^c = \bigcap_{k \geq n} \{x \in E : |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| < 1/2^k\}, \quad (\text{A.62})$$

则 f_{n_k} 在 F_n 上一致收敛, 并且有

$$|f_{n_k} - f_{n_m}| \leq \sum_{p=k}^{m-1} |f_{n_p} - f_{n_{p+1}}| \leq \sum_{p=k}^{m-1} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\text{A.63})$$

根据一致收敛性的 Cauchy 判别法, $g_k = f_{n_k}$ 在 F_n 中一致收敛到某个函数 $g(x)$, 并且 $m(E - F_n) = m(F_n^c) = m(\bigcap_{k \geq n} E_k) \leq 1/2^{n-1}$, 因此 f_{n_k} 近一致收敛到 f , 断言 1 得证.

最后证明断言 2, 固定 $\varepsilon > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $N_{\varepsilon, \delta}$ 使得当 $m, n > N_{\varepsilon, \delta}$ 时

$$m(\{x \in E : |f_n - f_m| \geq \varepsilon\}) < \delta, \quad (\text{A.64})$$

取 $\varepsilon = 1/2^k$, $\delta = 1/2^k$, N_k , 要求 $N_k \leq N_{k+1}$, 则当 $n, m > N_k$ 时

$$m(\{x \in E : |f_m - f_n| \geq 1/2^k\}) < 1/2^k, \quad (\text{A.65})$$

再取 $n_k > N_k$ 即得 Claim.

事实上, 第 4 条的证明细节已经包含在第 3 条中.

命题 A.10

若 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则其存在一个子列 f_{n_k} 近一致收敛到 f .

证明 由于 $|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f_m - f|$, 因此 $\{f_n\}$ 为依测度 Cauchy 列, 根据 3 中的断言可知存在 $\tilde{f}$ 以及子列 f_{n_k} 近一致收敛到 $\tilde{f}$, 因此 f_{n_k} 依测度收敛到 $\tilde{f}$, 而依测度收敛的唯一性 (良定性) 可知 $f = \tilde{f}, a.e.$, 也就是说 f_{n_k} 近一致收敛到 $\tilde{f} = f, a.e.$.

由于近一致收敛强于几乎处处收敛，因此如下推论是显然的。

推论 A.1

若 $f_n \xrightarrow{m} f$ ，则其存在一个子列 $f_{n_k} \xrightarrow{m} f$.



最后证明第 5 条：

命题 A.11

$f_n \xrightarrow{m} f$ 当且仅当 $\{f_n\}$ 的任意子列 $\{f_{n_k}\}$ 都有子列 $\{f_{n_{k_p}}\}$ 近一致收敛到 f .



证明 若 $f_n \xrightarrow{m} f$ ，则 $f_{n_k} \xrightarrow{m} f$ ，由 4 可知其存在近一致收敛子列，得证；反之设右边成立，若 f_n 不依测度收敛到 f ，则存在 $\varepsilon > 0$ ， $\delta > 0$ ，使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) \geq \delta, \quad (\text{A.66})$$

由此可知其任一子列 $\{f_{n_k}\}$ 均不依测度收敛到 f 。但根据假设， $\{f_{n_k}\}$ 存在近一致收敛子列 $\{f_{n_{k_p}}\}$ ，由 2 可知该子列依测度收敛，矛盾。

特别地，当 $m(E) < \infty$ 时近一致收敛与几乎处处收敛等价，因此下面的推论显然成立

推论 A.2

若 $m(E) < \infty$ ，则 $f_n \xrightarrow{m} f$ 当且仅当 $\{f_n\}$ 的任意子列 $\{f_{n_k}\}$ 都有几乎处处收敛子列 $\{f_{n_{k_p}}\}$.



A.4 L^p 空间

在讨论可积性时定义了 L^1 空间，这一概念可以推广到任意 $p \geq 1$ 上。

定义 A.5 (L^p 空间)

对于 $p \geq 1$ ，可测函数 f ，若 $\int |f|^p < \infty$ ，则称 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ，定义范数

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}, \quad (\text{A.67})$$

容易验证 $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ 为赋范向量空间。



注 可以定义 L^∞ 范数，即 $\|f\|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R} : |f| \leq M, a.e.\}$ ，这也称为 f 的本性上确界。

关于 L^p 范数有一些不等式：

引理 A.2 (Young 不等式)

对任意 $a, b > 0, p, q \geq 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (\text{A.68})$$



证明 取对数，根据对数函数的凸性 (Jensen 不等式) 得证。

引理 A.3 (Holder 不等式)

对任意 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，若 $f \in L^p, g \in L^q$ 则

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (\text{A.69})$$



证明 令 $\tilde{f} = f/\|f\|_p, \tilde{g} = g/\|g\|_q$ ，则有 Young 不等式可得

$$\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 = \int |\tilde{f}\tilde{g}| \leq \int \frac{|f|^p}{p} + \int \frac{|g|^q}{q} = 1, \quad (\text{A.70})$$

移项得证.

引理 A.4 (Minkowski 不等式)

设 $p \geq 1, f, g \in L^p$, 则 $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.



证明 根据 Holder 不等式有

$$|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}, \quad (\text{A.71})$$

因此

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}, \quad (\text{A.72})$$

移项得证.

A.5 有界变差函数的性质

定理 A.5 (Fubini 微分定理)

设 $\{f_n\}$ 为 $[a, b]$ 上的递增函数列, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 收敛, 则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad a.e. x \in [a, b] \quad (\text{A.73})$$



证明 $\{f_n\}$ 单调递增说明其在 $[a, b]$ 上几乎处处可导, 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) + R_N(x) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^N f_n'(x) + R_N'(x), \quad a.e. x \in [a, b], \quad (\text{A.74})$$

由于 f_n' (几乎处处) 非负, 因此 (几乎处处) $R_N'(x) \geq R_{N+1}'(x)$, 即存在 $R(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N'(x)$, 根据单调收敛定理有

$$\int_a^b R(x) dx = \int_a^b \lim_{N \rightarrow \infty} R_N'(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b R_N'(x) dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} (R_N(b) - R_N(a)) = 0, \quad (\text{A.75})$$

因此 $R(x) = 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N'(x), a.e.$, 即原式成立.

命题 A.12

设 $f \in BV([a, b])$, 则 $(T_f(a, x))' = |f'(x)|, a.e.$



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\pi: a = t_0 < \dots < t_N = b$ 使得

$$0 < T_f(a, b) - \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \varepsilon, \quad (\text{A.76})$$

构造 $[a, t_1]$ 上的函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(a), & f(t_1) \geq f(a), \\ -f(x) + f(a), & f(t_1) < f(a), \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

再定义 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + g(t_i) - f(t_i), & f(t_{i+1}) \geq f(t_i), \\ -f(x) + g(t_i) + f(t_i), & f(t_{i+1}) < f(t_i), \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

则 $|g'(x)| = |f'(x)|, a.e.$, 并且 $0 < T_f(a, b) - g(b) < \varepsilon$, $T_f(a, x) - g(x)$ 单调递增. 取 $\varepsilon = 1/2^n$, 可取 $\{g_n(x)\}$

使得

$$0 < T_f(a, x) - g_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad |g'_n(x)| = |f'(x)| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (T_f(a, x) - g_n(x)) < \infty, \quad (\text{A.79})$$

根据 Fubini 微分定理有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T'_f(a, x) - g'_n(x)) < \infty, a.e., \quad (\text{A.80})$$

由于 $T'_f(a, x) \geq 0, a.e., |f'(x)| = |g'(x)|, a.e.$, 因此取其中项令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $T'_f(a, x) = |f'(x)|, a.e.$